

with (Gym) :

## Tidligere Matematik b skriftlig eksamansopgaver Af stxmatematik

### Matematik B - Fredag den 6. december 2019

Delprøve 1 - Uden hjælpemidler

#### Opgave 1

**Opgave 1** En andengradsligning er givet ved

$$x^2 - 14x + 13 = 0.$$

(5 point)

a) Bestem diskriminanten for ligningen.

(10 point)

b) Løs ligningen.

a)

For at bestemme diskriminanten for ligningen bruger jeg formelen for diskriminanten:  $d = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$   
Jeg indsætter altså bare værdierne fra andengradsligningen.

$$a = 1$$

$$b = -14$$

$$c = 13$$

$$d = (-14)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 13 = 196 - 52 = 144$$

Dermed er diskriminanten bestemt

b)

For at løse ligningen vil jeg opstille nulpunktsformlen:  $x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2 \cdot a}$

Da jeg allerede kender alle værdierne kan jeg bare indsætte dem i formlen

$$x = \frac{14 \pm \sqrt{144}}{2} = \frac{14 \pm 12}{2}$$

$$x_1 = \frac{14 - 12}{2} = 1$$

$$x_2 = \frac{14 + 12}{2} = 13$$

Dermed er ligningen løst:  $x = 1$  eller  $x = 13$

## Opgave 2

**Opgave 2** En funktion  $f$  er givet ved

$$f(x) = 6x^4 + 4x + 20.$$

(10 point)

a) Bestem  $f'(x)$ .

(10 point)

b) Bestem en ligning for tangenten til grafen for  $f$  i punktet  $P(1, f(1))$ .

a)

## Afledede funktioner

		Funktion $y = f(x)$	Afledet funktion $y' = f'(x) = \frac{dy}{dx}$
Lineær funktion	(127)	$a \cdot x + b$	$a$
	(128)	$k$	$0$
Logaritmefunktion	(129)	$\ln(x)$	$\frac{1}{x} = x^{-1}$
Eksponentialfunktioner	(130)	$e^x$	$e^x$
	(131)	$e^{kx}$	$k \cdot e^{kx}$
	(132)	$a^x$	$a^x \cdot \ln(a)$
Potensfunktioner	(133)	$x^a$	$a \cdot x^{a-1}$
	(134)	$\frac{1}{x} = x^{-1}$	$-\frac{1}{x^2} = -x^{-2}$
	(135)	$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$
Trigonometriske funktioner	(136)	$\cos(x)$	$-\sin(x)$
	(137)	$\sin(x)$	$\cos(x)$

For at finde den afledte funktion vil jeg bruge formel: (133), (127), (128)

$$f'(x) = 24 \cdot x^3 + 4$$

Dermed er den afledte funktion bestemt

b)

For at bestemme en ligning for tangenten til grafen for  $f$  i det givne punkt vil jeg bruge formelen:

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

Jeg indsætter altså punktet i funktionerne

$$f'(1) = 24 \cdot 1^3 + 4 = 28$$

$$f(1) = 6 \cdot 1^4 + 4 \cdot 1 + 20 = 6 + 4 + 20 = 30$$

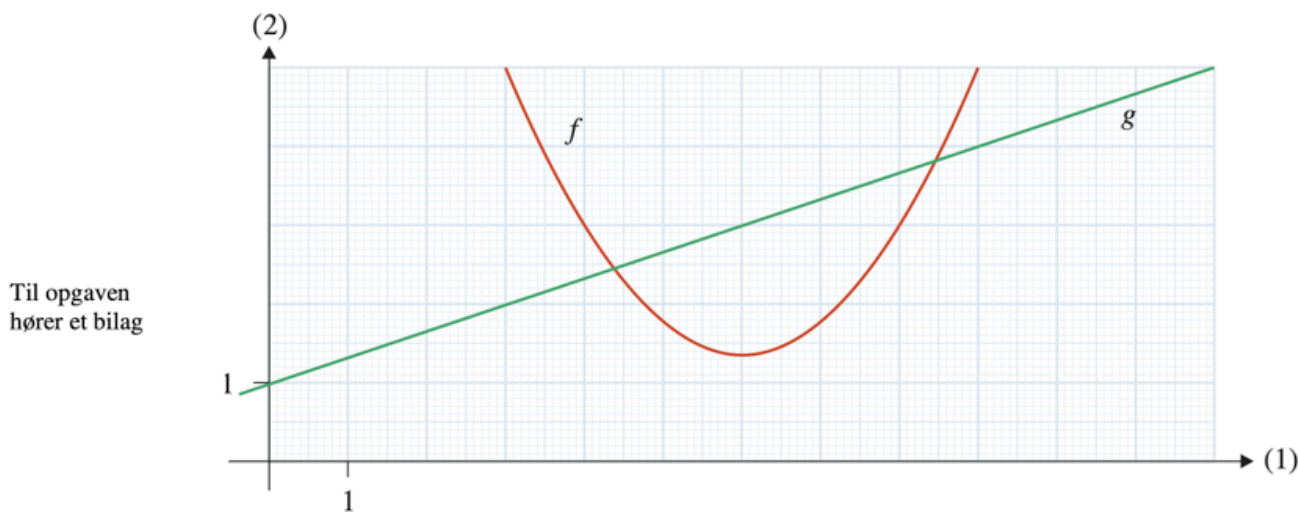
Nu kan jeg indsætte disse værdier i formelen

$$y = 28 \cdot (x - 1) + 30 = 28x - 28 + 30 = 28x + 2$$

Dermed er ligningen for tangenten i punktet fundet til at være:  $y = 28 \cdot x + 2$

## Opgave 3

**Opgave 3** Figuren viser graferne for to funktioner  $f$  og  $g$ .



(5 point)

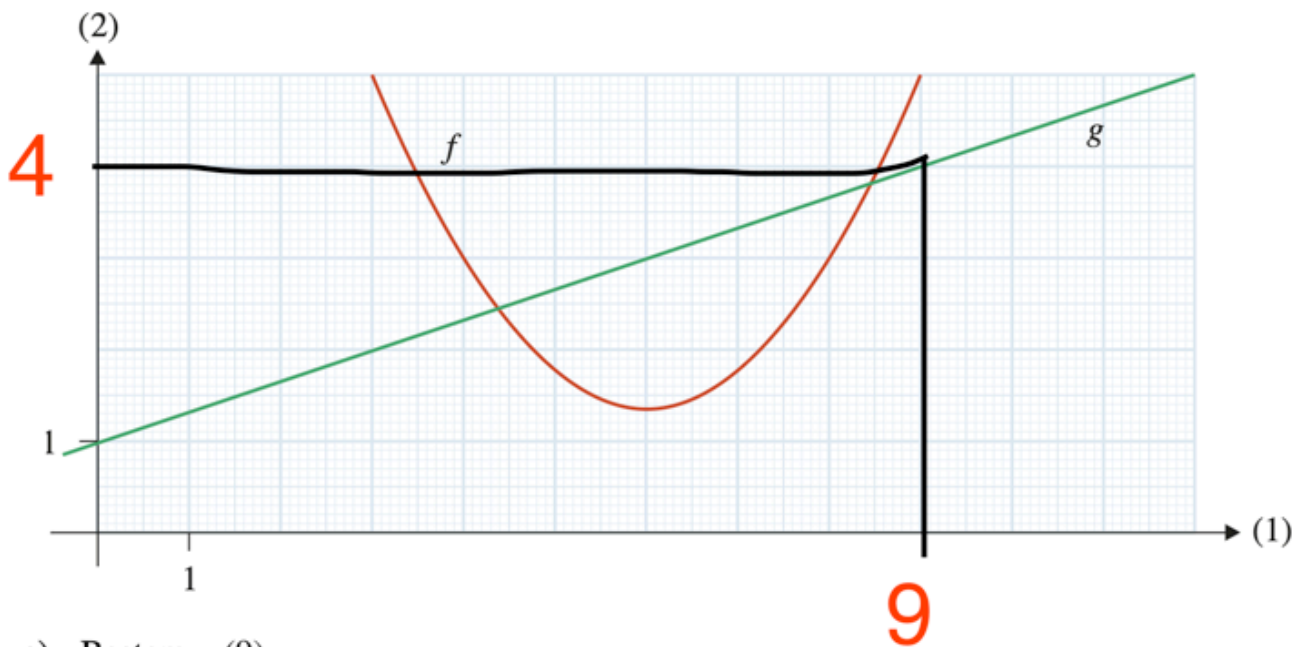
a) Bestem  $g(9)$ .

(5 point)

b) Bestem  $f(g(9))$ . Benyt vedlagte bilag.

a)

Jeg vil bruge bilaget til at bestemme  $g(9)$ . Jeg går ud 9 på x-aksen og går op for at ramme grafen, derefter går jeg ud til y-aksen for at finde den tilhørende værdi



a) Bestem  $g(9)$

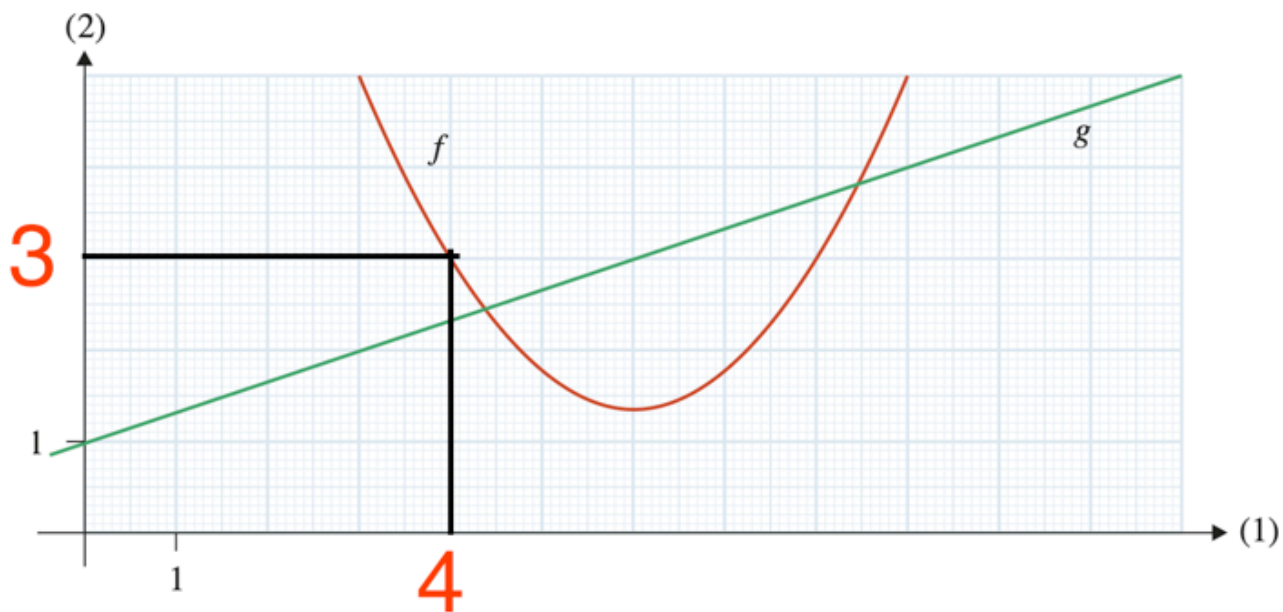
$$g(9) = 4$$

b)

for at bestemme  $f(g(9))$  skal jeg bare spotte at jeg kan erstatte  $g(9)$  med hvad den er lig med

$$f(g(9)) = f(4)$$

Jeg går altså 4 ud på x-aksen og derefter gå op til  $f$ , og ud til siden for at finde den tilsvarende  $y$ -værdi



a) Bestem  $f(4)$

$$f(g(9)) = 3$$

## Opgave 4

**Opgave 4** Et hold på 12 elever består af 7 drenge og 5 piger.

(5 point) a) Bestem, hvor mange forskellige grupper bestående af netop 2 drenge, der kan dannes af de 12 elever på holdet.

(10 point) b) Bestem, hvor mange forskellige grupper bestående af netop 2 drenge og 2 piger, der kan dannes af de 12 elever på holdet.

a)  
Antallet af forskellige grupper bestående af netop 2 drenge, der kan dannes ud af de 12 elever på holdet,  $K(7,2)$ , da der er 7 drenge på holdet. Jeg aflæser i Pascals trekant i formelsamlingen, at

$$K(7,2) = 21.$$

Der kan dannes 21 forskellige grupper bestående af netop 2 drenge af de 12 elever på holdet.

b)  
I a) bestemte jeg, at der kan dannes 21 forskellige grupper bestående af netop 2 drenge. Antallet af forskellige grupper bestående af netop 2 piger er  $K(5,2)$ . Jeg aflæser i Pascals trekant i formelsamlingen, at

$$K(5,2) = 10.$$

Antallet af forskellige grupper, der består af netop 2 drenge og 2 piger er

$$21 \cdot 10 = 210$$

Der kan dannes 210 forskellige grupper bestående af netop 2 drenge og 2 piger af de 12 elever på holdet.

## Opgave 5

**Opgave 5** I et koordinatsystem er to vektorer  $\vec{a}$  og  $\vec{b}$  givet ved

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} t \\ 10 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(10 point) a) Bestem tallet  $t$ , så vektorerne  $\vec{a}$  og  $\vec{b}$  er ortogonale.

a)

For at bestemme tallet  $t$  så vektorerne er ortogonale skal jeg tage deres prikprodukt og sætte lig nul

$$\begin{pmatrix} t \\ 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow t \cdot (-6) + 10 \cdot 3 = 0 \Leftrightarrow -6 \cdot t + 30 = 0 \Leftrightarrow -6 \cdot t = -30 \Leftrightarrow t = 5$$

## Opgave 6

**Opgave 6** En funktion  $f$  opfylder, at

$$f(2) = 0 \text{ og } f(5) = 4.$$

Fortegn og nulpunkter for  $f'(x)$  er som angivet på tallinjen.

Til opgaven  
hører et bilag



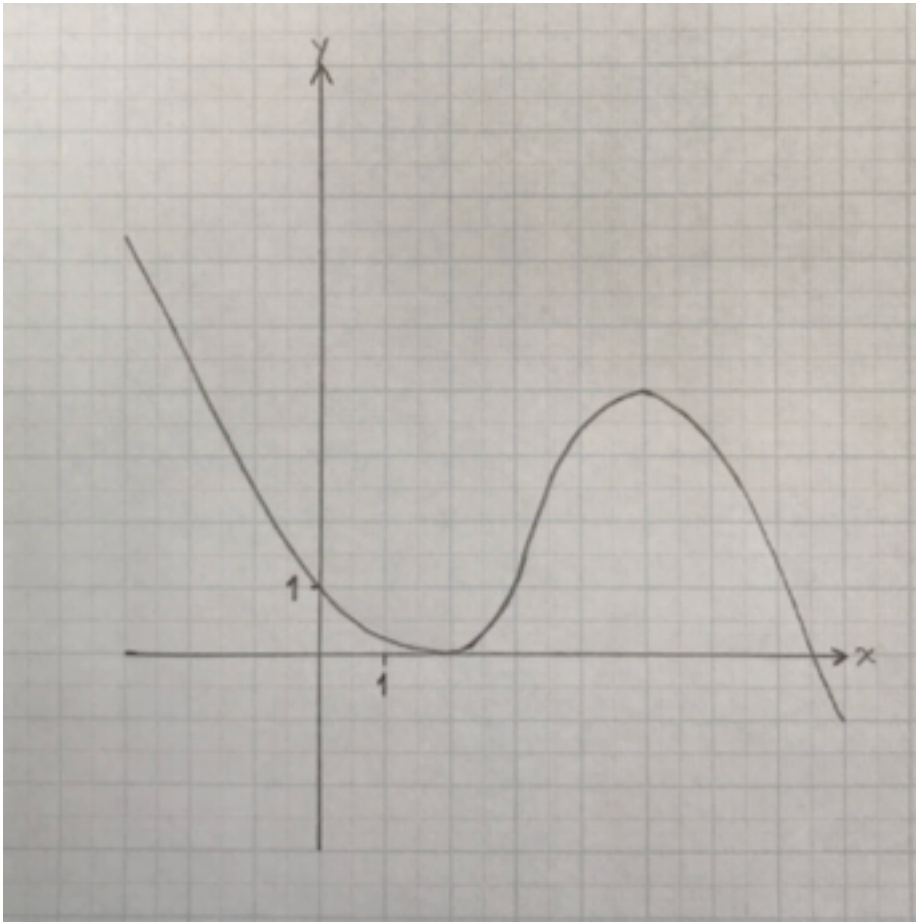
(10 point) a) Tegn en mulig graf for  $f$ .

a)

Jeg får oplyst, at  $f(2) = 0$  og  $f(5) = 4$ , dvs. at punkterne  $(2,0)$  og  $(5,4)$  ligger på grafen for  $f$ .

Jeg aflæser på fortegnslinjen for  $f'$ , at  $f$  er aftagende i intervallerne  $]-\infty; 2]$  og  $[5; \infty[$  og i voksende intervallet  $[2;5]$ , dvs. at grafen for  $f$  har et lokalt minimum i  $x=2$  et lokalt maksimum i  $x = 5$ .

Jeg tegner en mulig graf for  $f$  på bilaget:



Delprøve 2 - Med hjælpemidler

## Opgave 7

Figuren viser en firesidet terning, hvor der er én side med en stjerne og tre blanke sider. Terningen kastes 20 gange. Det antages, at antallet af gange terningen lander på stjernen, er binomialfordelt.

(10 point)

a) Bestem antalsparameteren  $n$  og sandsynlighedsparameteren  $p$  for binomialfordelingen.

(10 point)

b) Bestem sandsynligheden for, at terningen lander på stjernen 5 gange.

a)

Jeg får oplyst, at det antages, at antallet af gange den firesidede terning lander på stjernen, er binomialfordelt. Antalsparameteren  $n$  er antallet af slag med terningen. Jeg får oplyst, at terningen kastes 20 gange, så antalsparameteren er  $n = 20$ .

Sandsynlighedsparameteren,  $p$ , er sandsynligheden for, at terningen lander på stjernen. Da terningen har én side med en stjerne og tre blanke sider, så er sandsynligheden for at terningen lander på stjernen 1 ud af 4.

Sandsynlighedsparameteren er derfor  $p = \frac{1}{4}$

b)

Jeg lader  $X$  være den binomialfordelte stokastiske variabel, der tæller antallet af gange terningen lander på stjernen. I a) bestemte jeg, at  $X \sim b(20, \frac{1}{4})$ . Sandsynligheden for at terningen lander på stjernen 5 gange er  $P(X = 5)$ . Vi bestemmer sandsynligheden med *binpdf*

$$\text{binpdf}\left(20, \frac{1}{4}, 5\right)$$

0.2023311519

(1.7.1)

Sandsynligheden for at terningen lander på stjernen 5 gange er 20.2%

## Opgave 8

restart; with(Gym) :

**Opgave 8** I et koordinatsystem er der givet et punkt  $P(2,3)$  og en linje  $l$  bestemt ved ligningen

$$x + 7y - 48 = 0.$$

(10 point)

a) Benyt en formel til at bestemme afstanden fra  $P$  til  $l$ .

En cirkel  $C$  har centrum i  $P$  og radius 5.

(5 point)

b) Opstil en ligning for  $C$ .

Det oplyses, at linjen  $l$  skærer cirklen  $C$  i to punkter  $A$  og  $B$ .

(10 point)

c) Bestem  $|\overline{AB}|$ .

a)

For at bestemme afstanden fra  $P$  til  $l$  vil jeg bruge formelen:  $dist(P, l) = \frac{|a \cdot x_1 + b \cdot y_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

jeg indsætter værdierne

$$dist(P, l) = \frac{|1 \cdot 2 + 7 \cdot 3 - 48|}{\sqrt{1^2 + 7^2}} = 2.50000000 \sqrt{2} \xrightarrow{\text{at 5 digits}} 3.5355$$

afstanden fra  $P$  til  $l$  er 3.5355

b)

For at opstille en ligningen for C bruger jeg formelen:  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

Jeg kender både punktet P og radius så jeg indsætter bare i formlen

$$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 5^2$$

c)

Jeg bestemmer koordinaterne til A og B ved at løse et ligningssystem

$solve(\{x + 7 \cdot y - 48 = 0, (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 5^2\}, \{x, y\})$

$$\{x = 6, y = 6\}, \{x = -1, y = 7\}$$

**(1.8.1)**

skæringspunkterne har koordinaterne:  $(-1, 7)$  og  $(6, 6)$

Jeg bestemmer afstanden via formelen:  $|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$$\sqrt{(-1 - 6)^2 + (7 - 6)^2} = 5\sqrt{2}$$

Afstanden mellem punkterne er  $5\sqrt{2}$

## Opgave 9

*restart, with(Gym) :*

## Opgave 9



Grafik: [www.colourbox.dk](http://www.colourbox.dk)

I en model kan befolkningsudviklingen i Kina beskrives ved

$$N(t) = \frac{2,2}{1 + 1,09 \cdot 0,9636^t},$$

hvor  $N(t)$  betegner befolkningstallet i Kina (målt i mia.) til tidspunktet  $t$  (målt i år efter 1985). Statistikere har fundet belæg for, at modellen kan bruges til fremskrivning af befolkningstallet i Kina.

(5 point)

a) Bestem befolkningstallet til tidspunktet  $t = 30$ .

(10 point)

b) Benyt modellen til at bestemme det årstal, hvor befolkningstallet er 1,8 mia.

(10 point)

c) Bestem  $N'(50)$ , og forklar betydningen af tallet.

Kilde: [www.ijsdr.org](http://www.ijsdr.org)

$$N(t) := \frac{2.2}{1 + 1.09 \cdot 0.9636^t} :$$

a)

Jeg bestemmer befolkningstallet til tidspunkt 30 ved at indsætte 30 på t's plads i funktionen

$$N(30) = 1.619589570$$

befolkningstallet 30 år efter 1985 er 1.619589570 mia

b)

Jeg sætter funktionen lig de 1.8 for at bestemme tidspunktet

$$N(t) = 1.8 \xrightarrow{\text{solve for } t} [[t = 42.88828554]]$$

Nu lægger jeg bare 1985 til t

$$1985 + 42.88828554 = 2027.888286$$

i årstallet 2027 er befolkningstallet på 1.8 mia

c)

Jeg tager den afledte og sætter 50 ind

$$N'(50) = 0.01016052449$$

dette tal betyder at i år  $1985 + 50 = 2035$  stiger befolkningstallet med 0.01016052449 om året

## Opgave 10

*restart, with(Gym) :*

**Opgave 10** En pige kaster en bold, og pigens klasse foretager en videoanalyse af boldens bane. Tabellen viser sammenhørende værdier af boldens vandrette afstand fra pigen og boldens højde over jorden.

Afstand (meter)	0	4	8	12	16	20
Højde (meter)	1,5	6,8	10,4	12,1	11,8	9,7

I en model kan sammenhængen beskrives ved

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c,$$

hvor  $f(x)$  betegner boldens højde over jorden (målt i meter), og  $x$  betegner boldens vandrette afstand fra pigen (målt i meter).

- (10 point) a) Bestem konstanterne  $a$ ,  $b$  og  $c$  ved at benytte andengradsregression på tabellens data.
- (10 point) b) Benyt modellen til at bestemme, boldens vandrette afstand fra pigen, når den rammer jorden.
- (10 point) c) Bestem  $f'(x)$ , og benyt denne til at bestemme boldens maksimale højde over jorden ifølge modellen.

$$X := [0, 4, 8, 12, 16, 20] :$$

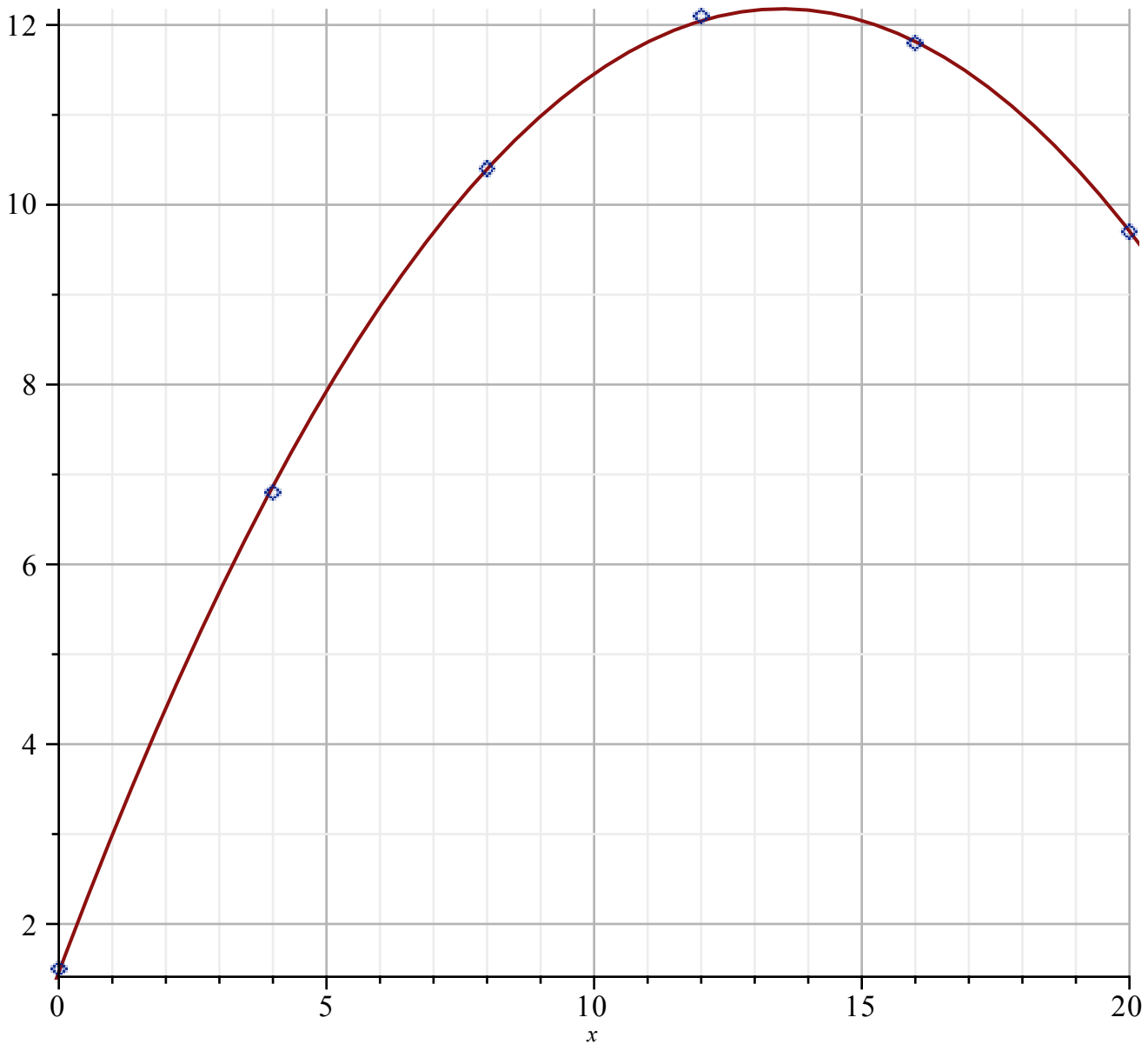
$$Y := [1.5, 6.8, 10.4, 12.1, 11.8, 9.7] :$$

a)

Jeg laver polyreg for at finde konstanterne

$$\text{PolyReg}(X, Y, 2)$$

Kvadratisk regression  
 $y = -0.058705 x^2 + 1.5862 x + 1.4643.$   
Forklaringsgrad  $R^2 = 0.99988$



dermed er:

$$a = -0.058705$$

$$b = 1.5862$$

$$c = 1.4643$$

b)

For at bestemme den vandrette afstand skal jeg bare finde længden mellem skæringspunkterne med x-aksen, så jeg sætte den fundne funktion lig nul

$$-0.058705 x^2 + 1.5862 x + 1.4643 = 0 \xrightarrow{\text{solve } -0.058705x^2 + 1.5862x + 1.4643 = 0}$$

$$[[x = -0.8935967519], [x = 27.91344174]]$$

**(1.10.1)**

Afstanden er 27.91344174 meter

c)

$$f(x) := -0.058705 x^2 + 1.5862 x + 1.4643 :$$

Jeg definere funktionen, hvorefter jeg kan bruge en maple kommando som hedder maximize. Denne kommando finder den højeste værdi som kan komme ud af ligningen  $f(x)$

$$\text{maximize}(f(x))$$

12.17901953

(1.10.2)

Maksimum er altså 12.17901953 meter

man kunne også tage den afledte og sætte lig nul

$$f'(x) = 0 \xrightarrow{\text{solve for } x} [[x = 13.50992249]]$$

Så hvis jeg tager denne x-værdi og sætter ind på x's plads i f får jeg maks højden

$$f(13.50992249) = 12.17901953$$

## Opgave 11

*restart, with(Gym) :*

**Opgave 11** En funktion  $f$  er givet ved

$$f(x) = x^3 - 2x + k,$$

hvor  $k$  er en konstant.

(10 point) a) Tegn grafen for  $f$  for  $k = 1$ .

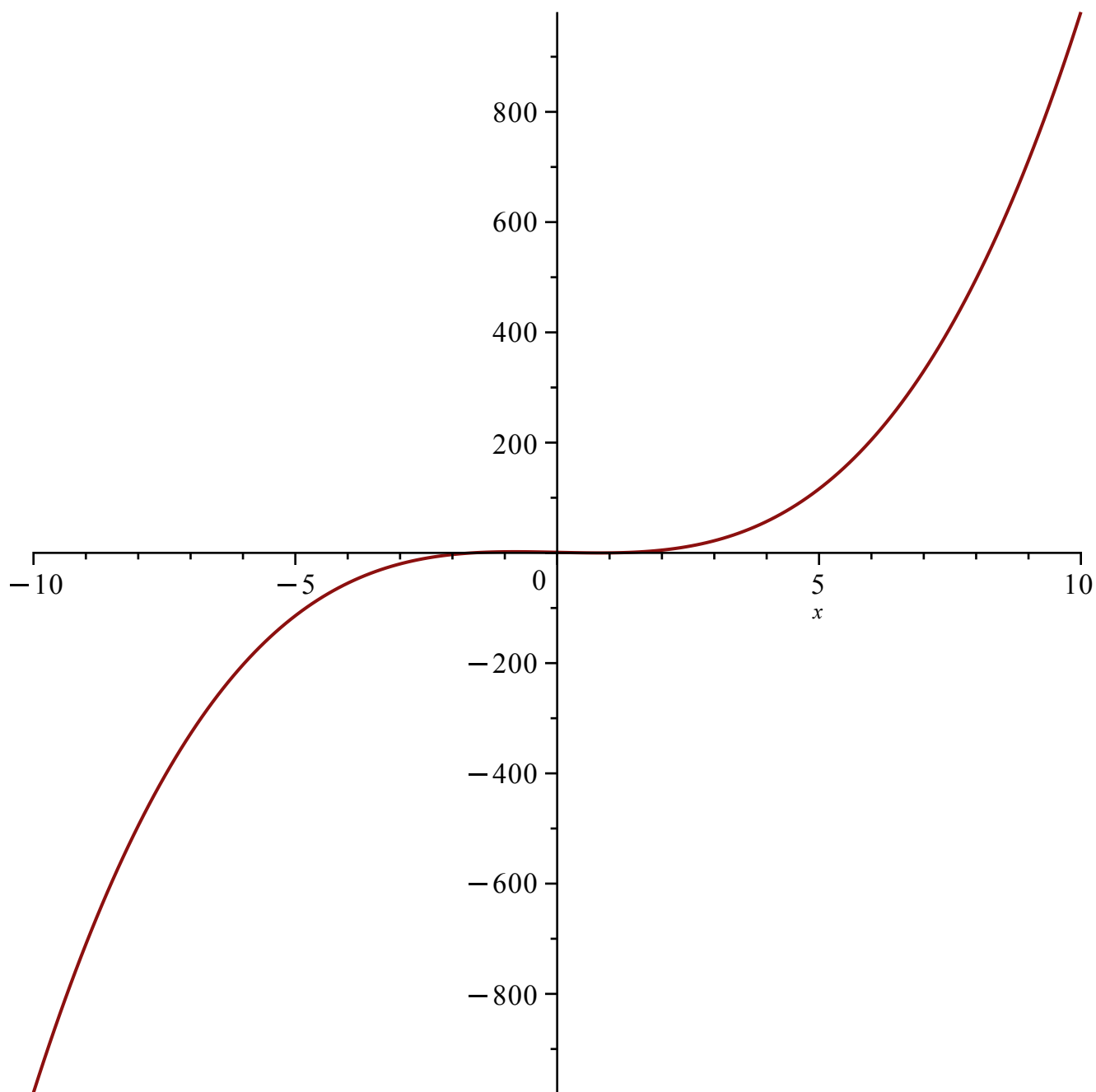
(10 point) b) Bestem de værdier af  $k$ , hvor  $f$  har netop to nulpunkter.

$$f(x) := x^3 - 2 \cdot x + k :$$

a)

jeg tegner grafen for f

$$\text{plot}(x^3 - 2 \cdot x + 1)$$



b)

for at bestemme  $k$ , når der er to nulpunkter vil jeg starte med at tage den afledte og sætte lig nul, for at bestemme funktionens ekstremumssteder

$$f'(x) = 0 \xrightarrow{\text{solve for } x} \left[ \left[ x = \frac{\sqrt{6}}{3} \right], \left[ x = -\frac{\sqrt{6}}{3} \right] \right]$$

Funktionen ligger på x-aksen hvis funktionen er lig nul. Jeg tager derfor værdierne og indsætter på  $x$ 's plads og sætter funktionen lig nul

$$f\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right) = 0$$

$$\xrightarrow{\text{solve } -.4444444444*6^{(1/2)}+k=0}$$

$$-0.4444444444 \sqrt{6} + k = 0 \quad (1.11.1)$$

$$[[k = 1.088662108]] \quad (1.11.2)$$

$$f\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right) = 0$$

$$\xrightarrow{\text{solve } .4444444444*6^{(1/2)}+k=0}$$

$$0.4444444444 \sqrt{6} + k = 0 \quad (1.11.3)$$

$$[[k = -1.088662108]] \quad (1.11.4)$$

Når  $k = 1.088662108$  eller  $k = -1.088662108$  så har funktionen netop to skæringspunkter med førsteaksen.

*restart, with(Gym) :*

## Matematik B - Mandag den 22. maj 2023

Delprøve 1 - Uden hjælpemidler

### Opgave 1

**Opgave 1** En funktion  $f$  er bestemt ved

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 9x + 4.$$

**a)** Bestem  $f'(x)$ .

a)

## Afledede funktioner

		Funktion	Afledet funktion
		$y = f(x)$	$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx}$
Lineær funktion	(127)	$a \cdot x + b$	$a$
	(128)	$k$	$0$
Logaritmefunktion	(129)	$\ln(x)$	$\frac{1}{x} = x^{-1}$
Ekspontialfunktioner	(130)	$e^x$	$e^x$
	(131)	$e^{kx}$	$k \cdot e^{kx}$
	(132)	$a^x$	$a^x \cdot \ln(a)$
Potensfunktioner	(133)	$x^a$	$a \cdot x^{a-1}$
	(134)	$\frac{1}{x} = x^{-1}$	$-\frac{1}{x^2} = -x^{-2}$
	(135)	$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$
Trigonometriske funktioner	(136)	$\cos(x)$	$-\sin(x)$
	(137)	$\sin(x)$	$\cos(x)$

For at bestemme den afledte bruger jeg regnereglerne (133) og (127) og (128)

$$f'(x) = 3x^2 + 4 \cdot x - 9$$

## Opgave 2

## Opgave 2

### a) Reducér udtrykket

$$2b^2 + (a + b) \cdot (a - b) - a^2.$$

a)

$$2 \cdot b^2 + (a + b) \cdot (a - b) - a^2$$

Jeg reducerer først ved at spotte at  $(a + b) \cdot (a - b)$  er den tredje kvadratsætning som er lig

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$$

$$2 \cdot b^2 + a^2 - b^2 - a^2$$

a i anden går ud, og så er der 2 b i anden tilbage samt negativ b i anden. Den negative fjerner en fra 2 b i anden

Dermed reduceres det hele til

$$b^2$$

## Opgave 3

**Opgave 3** Figuren viser grafen for en funktion  $f$ .

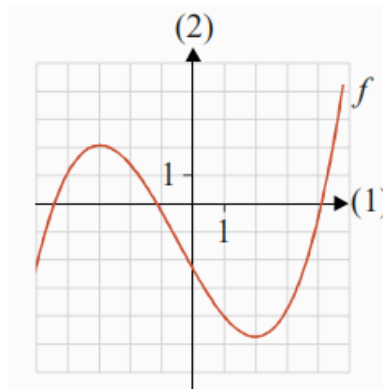
a) Bestem  $f(1)$  ved hjælp af grafen.

Benyt bilaget.

*Bilag  
vedlagt*

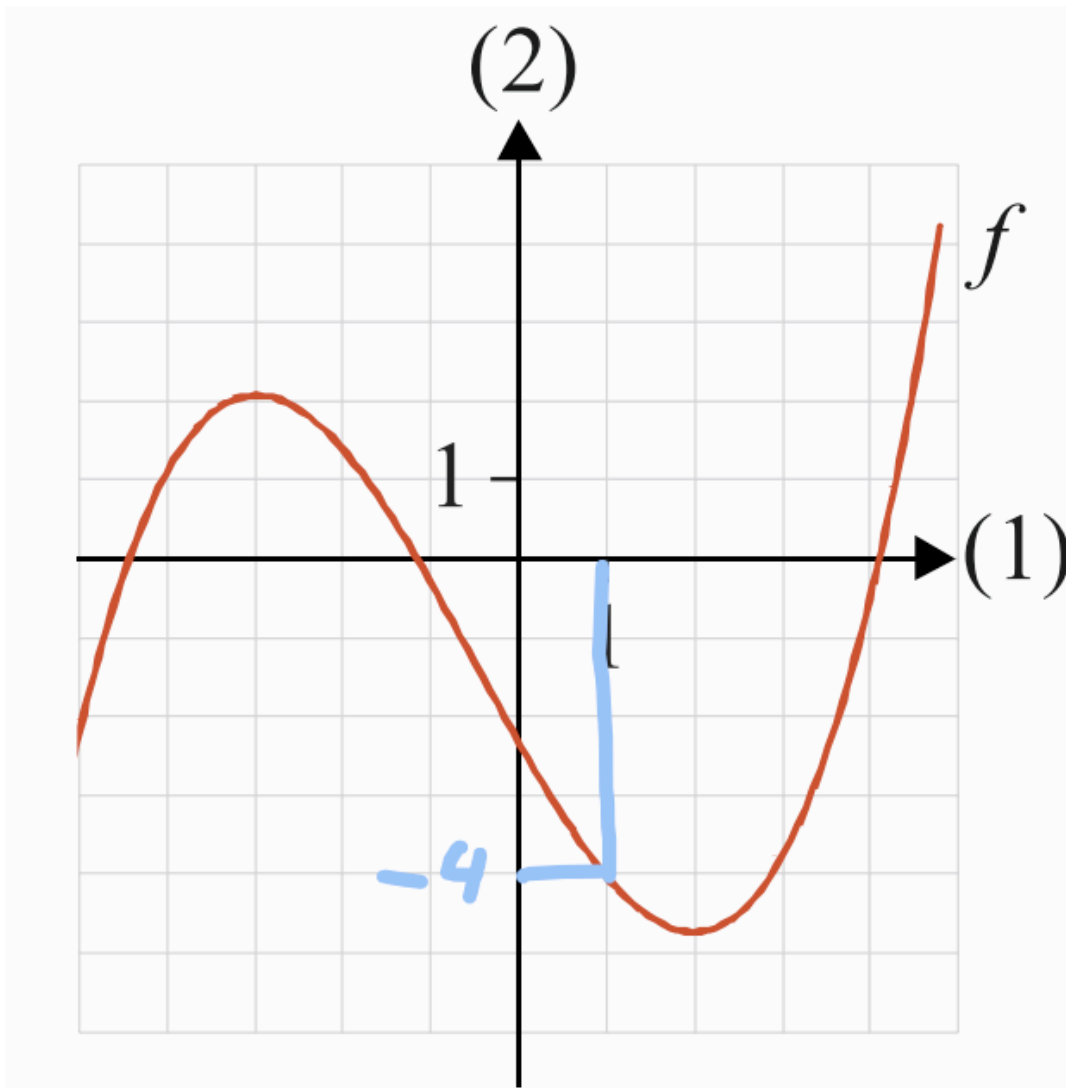
b) For hvilke værdier af  $x$  er  $f'(x) \leq 0$ ?

Begrund svaret. Benyt bilaget.



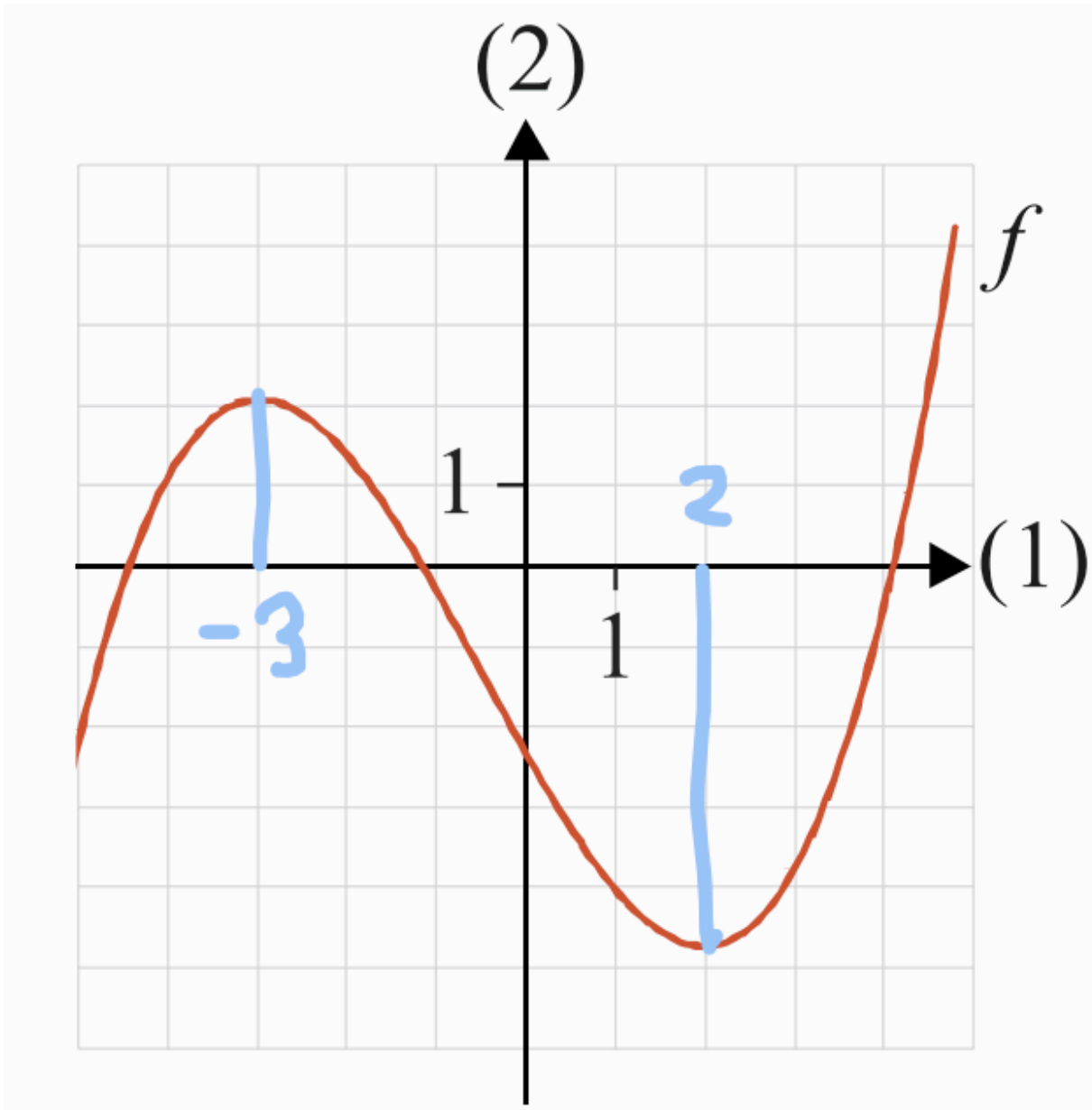
a)

Jeg bruger bilaget



$$f(1) = -4$$

b)  
jeg aflæser på grafen at  $f$  er aftagende for  $-3 \leq x \leq 2$



Den er voksende så aftagende også voksende

#### Opgave 4

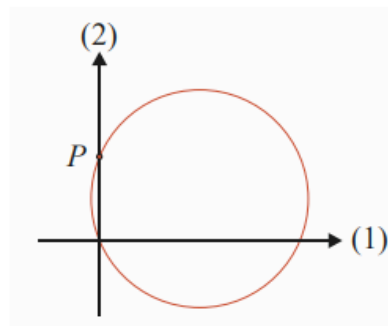
**Opgave 4** En cirkel er givet ved ligningen

$$(x-12)^2 + (y-5)^2 = 13^2.$$

a) Bestem centrum og radius for denne cirkel.

Cirklen skærer andenaksen i punktet  $P(0,10)$ .

b) Bestem en ligning for tangenten til cirklen i punktet  $P$ .



a)

For at bestemme centrum og radius bruger jeg formelen:  $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$   
centrum er altså lig a og b og r er radius

$$C(12, 5)$$

$$r = 13$$

b)

Vektoren fra cirkelns centrum til punktet P er en normalvektor til tangenten til cirklen i punktet P. Jeg kan dermed bestemme vektoren centrum til punkt

$$\vec{CP} = \begin{pmatrix} 0 - 12 \\ 10 - 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Da det er en normalvektor til tangenten i P så er tangenten givet ved:

$$-12 \cdot (x - 0) + 5 \cdot (y - 10) = 0$$

altså

$$-12x + 5y - 50 = 0$$

## Opgave 5

**Opgave 5** Et byggefirma har 5 murere og 7 tømrere ansat. Til en arbejdsopgave skal firmaet bruge et hold på 3 murere og 4 tømrere.

a) På hvor mange måder kan firmaet udvælge holdet?

a)

Firmaet kan vælge 3 murere blandt 5 murere på  $K(5,3)$  forskellige måder. Tilsvarende kan firmaet vælge 4 tømrere blandt 7 tømrere på  $K(7,4)$  forskellige måder.

Firmaet kan derfor vælge 3 murere og 4 tømrere på  $K(5, 3) \cdot K(7, 4)$  forskellige måder.  
Jeg aflæser i Pascals trekant, at  $K(5,3) = 10$  og  $K(7,4) = 35$   
Dermed er  $K(5, 3) \cdot K(7, 4) = 10 \cdot 35 = 350$

Firmaet kan vælge 3 murere og 4 tømrere på 350 forskellige måder.

## Opgave 6

**Opgave 6** Et andengradspolynomium  $f$  er givet ved

$$f(x) = -2 \cdot x^2 + b \cdot x + c,$$

hvor  $b$  og  $c$  er tal.

Grafen for  $f$  har toppunkt i  $T(1, 5)$ .

a) Bestem tallene  $b$  og  $c$ .

a)

toppunktsformlen er givet:  $T\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{d}{4a}\right)$

jeg kan dermed opstille ligningerne

$$-\frac{b}{2 \cdot (-2)} = 1$$

$$\frac{b}{4} = 1$$

altså  $b = 4$

$$f(1) = 5$$

$$-2 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 + c = 5$$

$$-2 + 4 + c = 5$$

$$c = 3$$

Delprøve 2 - Med hjælpemidler

## Opgave 7

**Opgave 7** Tabellen viser den samlede længde af de danske motorveje i perioden 1972-2022.

Antal år efter 1972	0	1	49	50
Antal km danske motorveje	236	273	1305	1306

*Alle tabellens 51 datapunkter findes i den vedhæftede fil: motorveje.xlsx*

I en model kan udviklingen beskrives ved funktionen

$$f(x) = a \cdot x + b,$$

hvor  $f(x)$  er den samlede længde af de danske motorveje (målt i km), og  $x$  er antal år efter 1972.

- Bestem tallene  $a$  og  $b$ .
- Bestem den samlede længde af de danske motorveje i 1990 ifølge modellen.
- Bestem residualet for 1990, og forklar betydningen af dette tal.

havde desværre ikke adgang til dataen :(

## Opgave 8

*restart; with (Gym) :*

**Opgave 8** En funktion  $f$  er givet ved

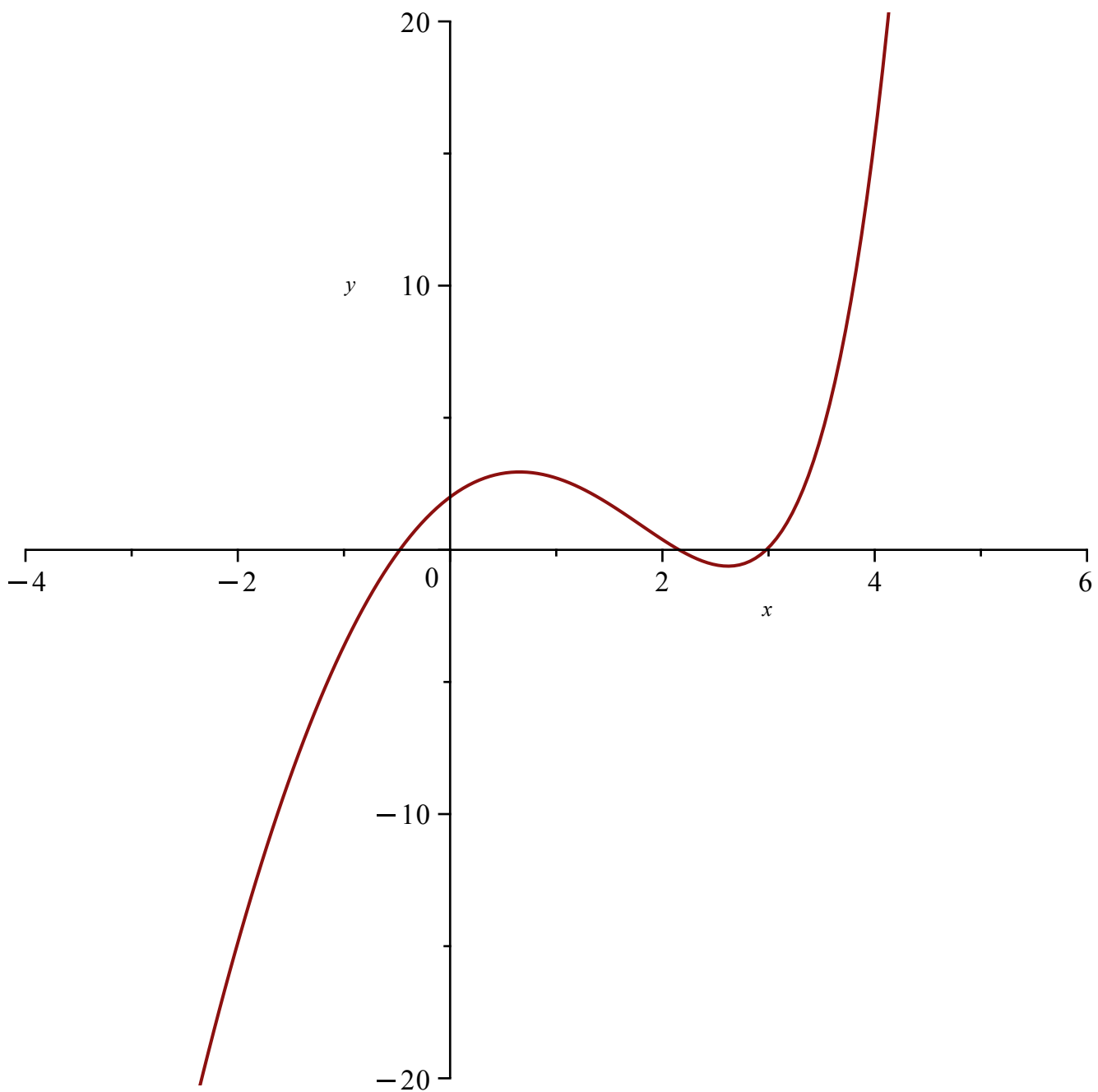
$$f(x) = e^x - 3x^2 + 2x + 1.$$

- Tegn grafen for  $f$ .
- Bestem en ligning for tangenten til grafen for  $f$  i punktet  $(0, f(0))$ .
- Løs ligningen  $f'(x) = 0$ , og forklar betydningen af de to løsninger.

$$f(x) := e^x - 3 \cdot x^2 + 2 \cdot x + 1 :$$

a)  
Jeg plotter grafen

$$\text{plot}(f(x), x = -4 .. 6, y = -20 .. 20)$$



b)  
 jeg bestemmer en ligning for tangenten via formlen:  $y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$

$$y = f'(0) \cdot (x - 0) + f(0)$$

$$y = 3x + 2$$

**(2.8.1)**

dermed er tangenten fundet

c)  
 jeg tager den afledte og sætter lig nul

$$f'(x) = 0. \xrightarrow{\text{solve for } x} [[x = 0.6538082734], [x = 2.617963727]]$$

jeg ved, at  $f'(x)$  er hældningen på tangenten til grafen for  $f$  punktet  $(x, f(x))$ . Løsningerne til ligningen  $f'(x) = 0$  er dermed førstekoordinaterne til de punkter på grafen for  $f$ , hvor grafen har en vandret tangent. jeg kan se på grafen i a), at løsningerne også er førstekoordinaterne til hhv. et lokalt maksimumspunkt og et lokalt minimumspunkt.

## Opgave 9

*restart, with (Gym) :*

**Opgave 9** I et koordinatsystem er der givet et punkt  $P(6, 4)$  og en linje  $l$  med ligningen  $4x + 3y - 11 = 0$ .

a) Benyt en formel til at bestemme afstanden fra  $P$  til  $l$ .

En linje  $m$  går gennem punktet  $P$  og står vinkelret på linjen  $l$ .

b) Bestem en parameterfremstilling for linjen  $m$ .

a)

For at bestemme afstanden fra  $P$  til  $l$  vil jeg bruge formlen:  $dist(P, l) = \frac{|a \cdot x_1 + b \cdot y_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

jeg indsætter værdierne

$$dist(P, l) = \frac{|4 \cdot 6 + 3 \cdot 4 - 11|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 5.000000000$$

afstanden fra  $P$  til  $l$  er 5

b)

For at bestemme en parameterfremstilling for linjen  $m$  som går gennem punktet  $P$  og står vinkelret på linjen  $l$ , kan jeg starte med at aflæse en normalvektor for linjen  $l$ .

$$n = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Da normalvektoren for linjen  $l$ , og linjen  $m$  står vinkelret på  $l$ , så er normalvektoren en retningsvektor for  $m$

jeg opstiller derfor parameterfremstillingen

$$m : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

## Opgave 10

restart, with (Gym) :

**Opgave 10** I 2021 udgjorde andelen af elbiler 2,4 % af den samlede bestand af personbiler i Danmark.

I en model angiver den stokastiske variabel  $X$  antallet af elbiler blandt 250 tilfældigt udvalgte biler.

Det antages, at  $X$  er binomialfordelt med antalsparameter  $n = 250$  og sandsynlighedsparameter  $p = 0,024$ .



Kilde: Colourbox

- Bestem sandsynligheden  $P(X = 2)$  for, at 2 af de 250 udvalgte biler er elbiler.
- Bestem det mest sandsynlige antal elbiler blandt de 250 udvalgte biler.

a)

Jeg får oplyst, at i en model angiver den stokastiske variabel  $X \sim b(250, 0.024)$  antallet af elbiler blandt 250 tilfældigt udvalgte biler. Jeg bestemmer  $P(X = 2)$ , dvs. sandsynligheden for at 2 af de 250 udvalgte biler er elbiler:

$$\text{binpdf}(250, 0.024, 2) = 0.04335973555$$

$P(X=2)=0.0434$ , dvs. at der er 4.34% sandsynlighed for, at 2 af de 250 udvalgte biler er elbiler.

b)

Jeg bestemmer middelværdien af  $X$

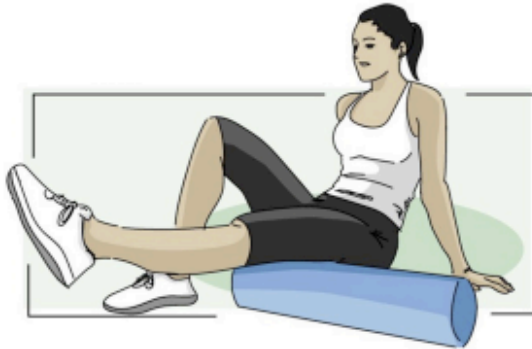
$$\mu = 250 \cdot 0.024 = 6.000$$

middelværdien af  $X$  er 6.

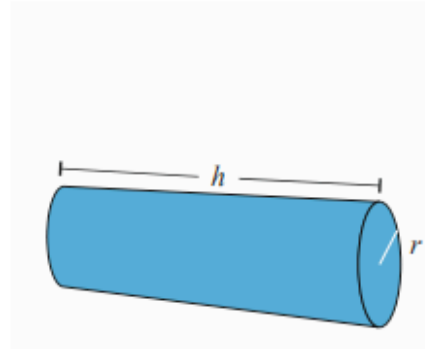
## Opgave 11

restart, with (Gym) :

## Opgave 11



Billedkilde: *physiqonomics*



Figuren viser en person på en foam-rulle.  
Til højre ses en geometrisk model af en foam-rulle.  
Modellen er en cylinder med længde  $h$ , radius  $r$  og rumfang  $7950 \text{ cm}^3$ .

a) Bestem længden  $h$  af foam-rullen, når radius er  $7,5 \text{ cm}$ .

Det oplyses, at overfladearealet af foam-ruller med rumfang  $7950 \text{ cm}^3$  og radius  $r$  kan beskrives ved

$$A(r) = 2\pi r^2 + \frac{15900}{r}.$$

b) For hvilken værdi af radius  $r$  bliver overfladearealet af foam-rullen mindst muligt?

a)  
jeg får oplyst at en geometrisk model af en foamrulle er en cylinder med længde  $h$  og radius  $r$  og et rumfang på  $7950 \text{ cm}^3$

Jeg beregner volumen af en cylinder med formlen:  $V = r^2 \cdot \pi \cdot h$

For at bestemme længden  $h$  når radius er kendt kan jeg indsætte værdierne i formlen

$$7950 = 7.5^2 \cdot \pi \cdot h \xrightarrow{\text{solve } 7950 = 176.7145868 \cdot h} \quad [ [h = 44.98779724] ] \quad (2.11.1)$$

længden af  $h$  er ca  $45 \text{ cm}$

b)

$$A(r) := 2 \cdot \pi \cdot r^2 + \frac{15900}{r} :$$

For at bestemme den radius  $r$ , der gør overfladearealet mindst muligt, kan vi løse ligningen  $A$  afledt lig nul for at finde eventuelle ekstrema:

$$\text{solve}(A'(r), r) \quad 10.81589394, -5.407946972 + 9.366838920 I, -5.407946972 - 9.366838920 I \quad (2.11.2)$$

Resultatet giver én brugbar, positiv løsning:  $r = 10.815$ . (De to andre resultater indeholder et "I", hvilket angiver komplekse tal. Dem ser vi bort fra, da en radius skal være et reelt, positivt tal).

For at bekræfte, at der er tale om et minimum og for samtidig at finde selve overfladearealet, benytter jeg minimize-kommandoen i intervallet  $0 < r$ :

*minimize(A(r), r > 0, location)*

2205.088190, {[{r = 10.81589394}, 2205.088190]}

**(2.11.3)**

Overfladearealet af foam-rullen bliver mindst muligt, når radius er ca. 10.82 cm.

*restart; with (Gym) :*

## Matematik B - Torsdag den 10. august 2023

Delprøve 1 - udenhjælpemidler

### Opgave 1

**Opgave 1** En funktion  $f$  er bestemt ved

$$f(x) = \ln(x) + 4 \cdot x^2.$$

**a)** Bestem  $f'(x)$ .

a)

## Afledede funktioner

		Funktion	Afledet funktion
		$y = f(x)$	$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx}$
Lineær funktion	(127)	$a \cdot x + b$	$a$
	(128)	$k$	$0$
Logaritmefunktion	(129)	$\ln(x)$	$\frac{1}{x} = x^{-1}$
Eksponentialfunktioner	(130)	$e^x$	$e^x$
	(131)	$e^{kx}$	$k \cdot e^{kx}$
	(132)	$a^x$	$a^x \cdot \ln(a)$
Potensfunktioner	(133)	$x^a$	$a \cdot x^{a-1}$
	(134)	$\frac{1}{x} = x^{-1}$	$-\frac{1}{x^2} = -x^{-2}$
	(135)	$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$
Trigonometriske funktioner	(136)	$\cos(x)$	$-\sin(x)$
	(137)	$\sin(x)$	$\cos(x)$

For at bestemme den afledte funktion bruger jeg regneregler: (129) og (133)

$$f'(x) = \frac{1}{x} + 8x$$

## Opgave 2

**Opgave 2** En stokastisk variabel  $X$  er binomialfordelt med antalsparameter  $n = 40$  og sandsynlighedsparameter  $p = 0,25$ .

a) Bestem middelværdien for  $X$ .

a)

Jeg får oplyst at  $X \sim b(40, 0.25)$

Jeg bestemmer middelværdien

$$\mu = 40 \cdot 0.25 = 10$$

### Opgave 3

**Opgave 3** En cirkel har centrum i  $C(2, 3)$  og radius  $r = 5$ .

a) Bestem en ligning for cirklen.

Punktet  $P(5, 7)$  ligger på cirklen.

b) Bestem en ligning for tangenten til cirklen i punktet  $P$ .

a)

For at bestemme en ligning for cirklen bruger jeg formelen:  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

jeg indsætter værdierne

$$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 5^2$$

b)

Vektoren fra cirkelns centrum til punktet  $P$  er en normalvektor til tangenten til cirklen i punktet  $P$ . Jeg kan dermed bestemme vektoren centrum til punkt

$$\overrightarrow{CP} = \begin{pmatrix} 5 - 2 \\ 7 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Da det er en normalvektor til tangenten i  $P$  så er tangenten givet ved:

$$3 \cdot (x - 5) + 4 \cdot (y - 7) = 0$$

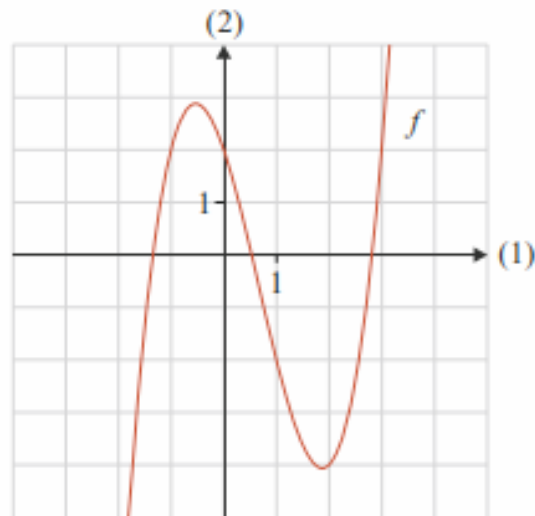
altså

$$3x + 4y - 43 = 0$$

### Opgave 4

## Opgave 4

Bilag  
vedlagt



På figuren ses grafen for tredjegradspolynomiet  $f$ .

a) Gør for hver af følgende påstande rede for, om den er korrekt eller forkert.

Påstand 1:  $f(1) = -2$

Påstand 2:  $f'(0) > 0$

Påstand 3: Ligningen  $f(x) = 0$  har netop 3 løsninger.

Benyt bilaget.

Jeg aflæser på grafen, at  $f(1) = -2$ , så påstand 1 er korrekt.

Jeg aflæser, at  $f$  er aftagende i  $x = 0$ , så  $f'(0) < 0$ , dvs. at påstand 2 er forkert.

Jeg aflæser, at førsteaksen og grafen for  $f$  har 3 skæringspunkter, dvs. at  $f$  har 3 nulpunkter. Ligningen  $f(x) = 0$  har dermed netop 3 løsninger, så påstand 3 er korrekt.

## Opgave 5

**Opgave 5** Udviklingen i Danmarks eksport af lægemidler kan beskrives ved en eksponentiel model

$$f(x) = 15 \cdot 1,096^x,$$

hvor  $f(x)$  er eksporten i mia. kr. og  $x$  er antal år efter 1997.

a) Hvad fortæller tallene 15 og 1,096 om eksporten af danske lægemidler?

Kilde: watchmedier

a)

Jeg får oplyst, at en eksponentiel model beskriver udviklingen i Danmarks eksport af lægemidler:

$$f(x) = 15 \cdot 1.096^x$$

Jeg får også oplyst, at  $f(x)$  er eksporten (i mia. kr.)  $x$  år efter 199.

Da  $f(0) = 15$ , så fortæller tallet 15, at Danmark eksporterede lægemidler for 15 mia. kr. i 1997.

Tallet 1.096 fortæller, at Danmarks eksport af lægemidler var voksende efter 1997. Vækstraten er  $r = 0.096$ , så eksporten voksede med 9.6% pr. år.

## Opgave 6

**Opgave 6** En parabel er graf for andengradspolynomiet  $f$  givet ved

$$f(x) = x^2 + 4x - 5.$$

- Bestem koordinatsættet til parablens toppunkt.
- Bestem en ligning for den tangent til grafen for  $f$ , der har en hældning på 10.

a)

Toppunkts formlen er givet ved:  $\left(-\frac{b}{2 \cdot a}, -\frac{d}{4 \cdot a}\right)$

Jeg indsætter værdierne

$$\left(-\frac{4}{2 \cdot 1}, -\frac{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5)}{4 \cdot 1}\right) = \left(-2, -\frac{16 + 20}{4}\right) = \left(-2, -\frac{36}{4}\right) = (-2, -9)$$

b)

Jeg differentierer  $f$

$$f'(x) = 2 \cdot x + 4$$

Jeg bestemmer førstekoordinaten til røringpunktet for den tangent til grafen for  $f$  der har en hældning på 10

$$2 \cdot x + 4 = 10$$

$$2x = 6$$

$$x = 3$$

Jeg bestemmer nu ligningen for tangenten via formlen:  $y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$

$$y = f'(3) \cdot (x - 3) + f(3)$$

$$y = 10 \cdot (x - 3) + (3^2 + 4 \cdot 3 - 5)$$

$$y = 10 \cdot x - 30 + (9 + 12 - 5)$$

$$y = 10 \cdot x - 30 + 16$$

$$y = 10 \cdot x - 14$$

Dermed er tangenten til grafen for  $f$  bestemt til at være  $y = 10 \cdot x - 14$

Delprøve 2 - Med hjælpemidler

## Opgave 7

restart, with (Gym) :

### Opgave 7



Billedkilde: <http://www.lemvigmotionscenter.dk>

Tabellen viser antallet af medlemmer i danske bowlingklubber fra 2014 til 2021.

Antal år efter 2014	0	1	2	3	4	5	6	7
Antal medlemmer	23628	21115	19723	18172	16742	16024	12890	10672

Kilde: Statistikbanken

Antallet af medlemmer i danske bowlingklubber kan beskrives med en lineær model

$$f(x) = a \cdot x + b,$$

hvor  $f(x)$  er antallet af medlemmer  $x$  år efter 2014.

- Benyt alle tabellens oplysninger til at bestemme tallene  $a$  og  $b$  ved lineær regression.
- Tegn et residualplot, og bestem det største residual.

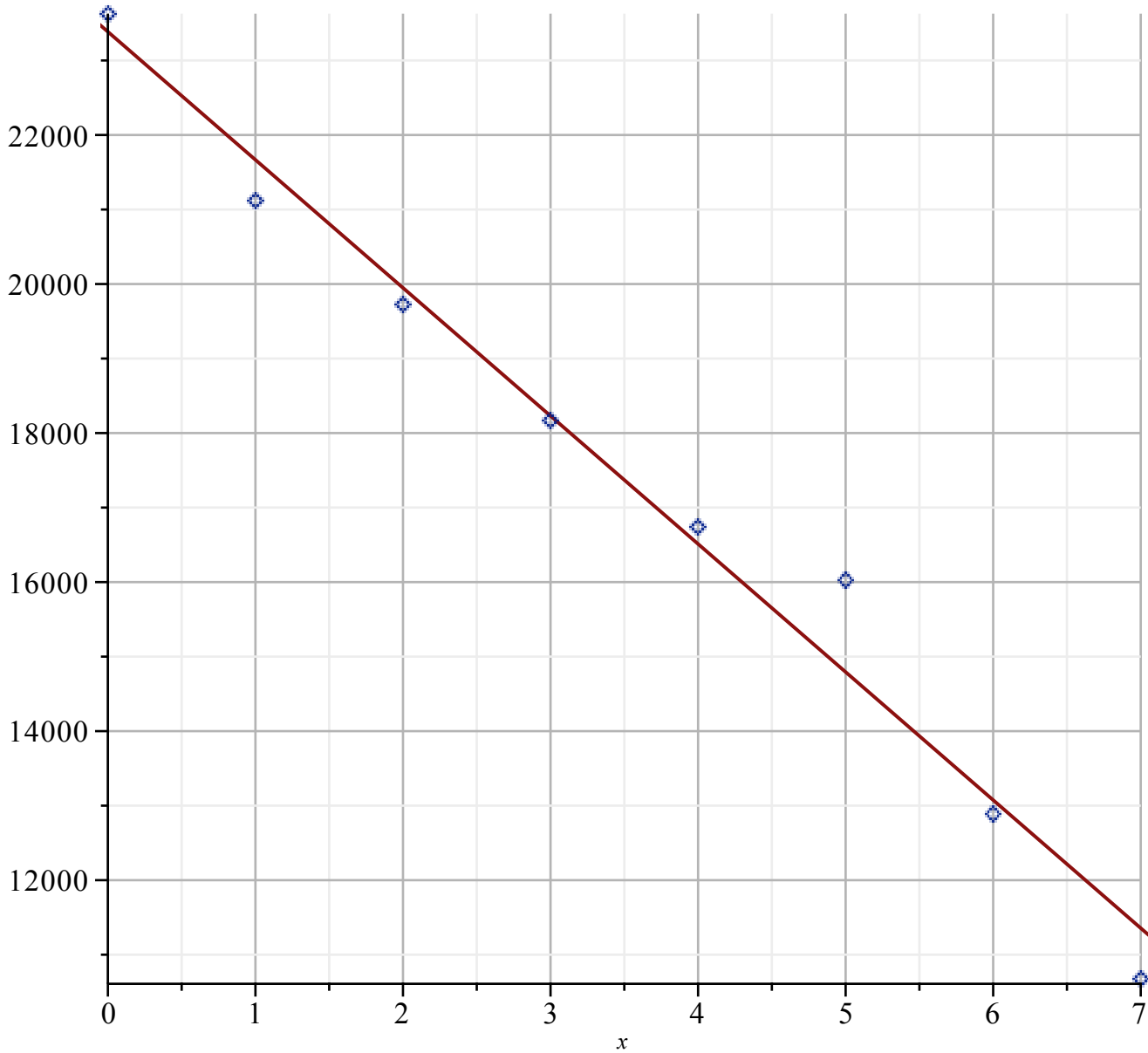
$$X := [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]:$$

$$Y := [23628, 21115, 19723, 18172, 16742, 16024, 12890, 10672]:$$

a)  
Jeg bestemmer  $a$  og  $b$  via LinReg

$$\text{LinReg}(X, Y)$$

Lineær regression  
 $y = -1718.4x + 23385..$   
Forklaringsgrad  $R^2 = 0.98033$



$a = -1718.4$   
 $b = 23385$

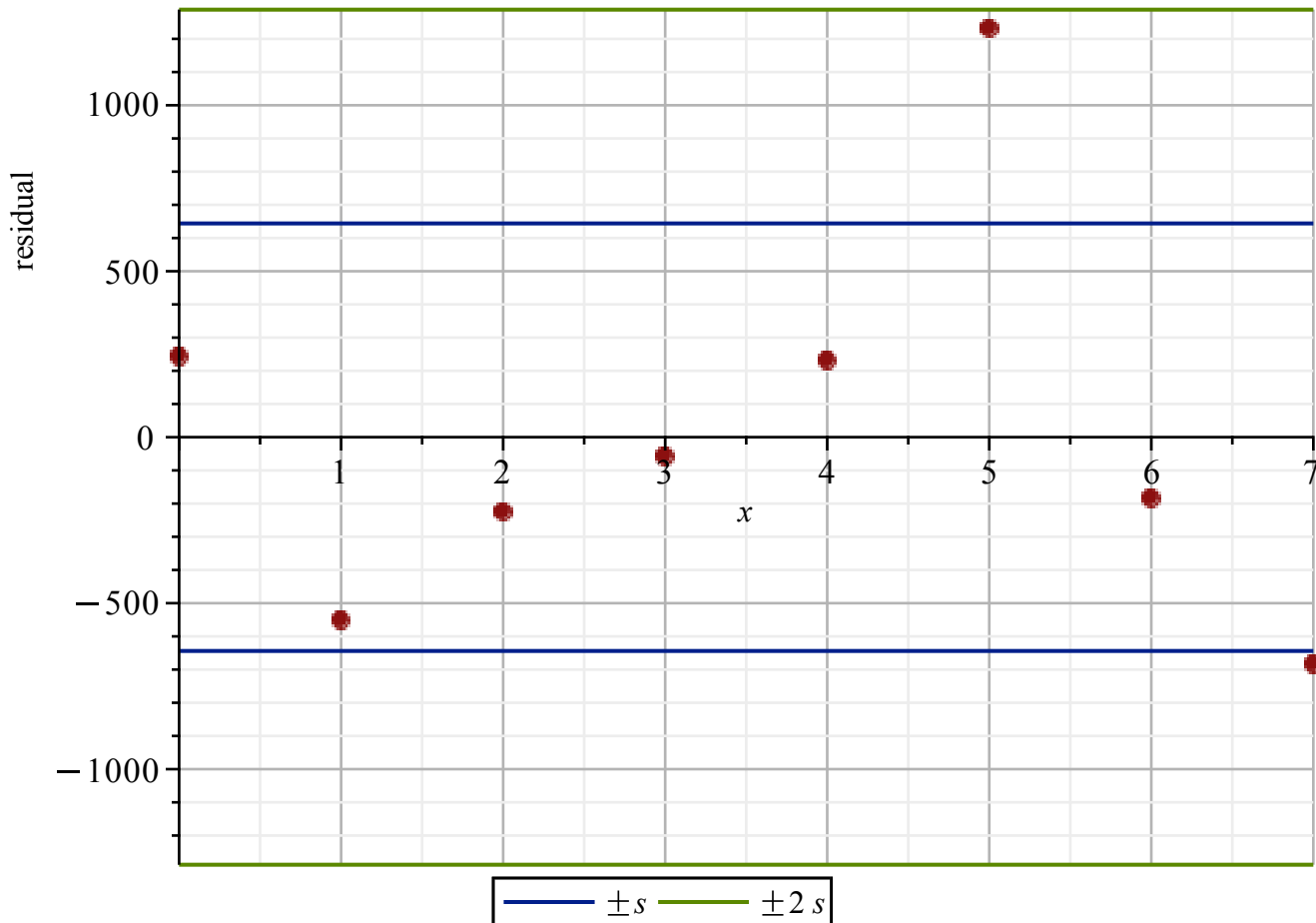
b)  
jeg tegner residualplottet

`plotResidualer(X, Y, LinReg)`

Residualspredning  $s = 643.960584296108$

Andel som er mindre end  $s$ : 75.00%

Andel som er mindre end  $2s$ : 100.00%



derefter bestemmer jeg residualerne  
 $residualer(X, Y, LinReg)$

$$\begin{bmatrix} 0 & 242.916666666672 \\ 1 & -551.702380952378 \\ 2 & -225.321428571424 \\ 3 & -57.9404761904734 \\ 4 & 230.440476190477 \\ 5 & 1230.82142857143 \\ 6 & -184.797619047618 \\ 7 & -684.416666666668 \end{bmatrix}$$

(3.7.1)

Det største residual er  $r_5 = 1230.82142857143$

## Opgave 8

*restart, with(Gym) :*

**Opgave 8** For en bestemt population af delfinarten øresvin har man målt sammenhørende værdier af delfinernes længde og alder. I en model kan denne sammenhæng beskrives ved

$$f(x) = 257 - 133 \cdot 0,748^x, \quad 0 \leq x \leq 35,$$

hvor  $f(x)$  er delfinens længde (målt i cm), og  $x$  er delfinens alder (målt i år).



*Billedkilde: Wikipedia/NASA*

- a) Tegn grafen for  $f$ .
- b) Benyt modellen til at bestemme alderen af en delfin med længden 200 cm.
- c) Bestem  $f'(7)$ , og gør rede for, hvad dette tal fortæller om delfinens længde.

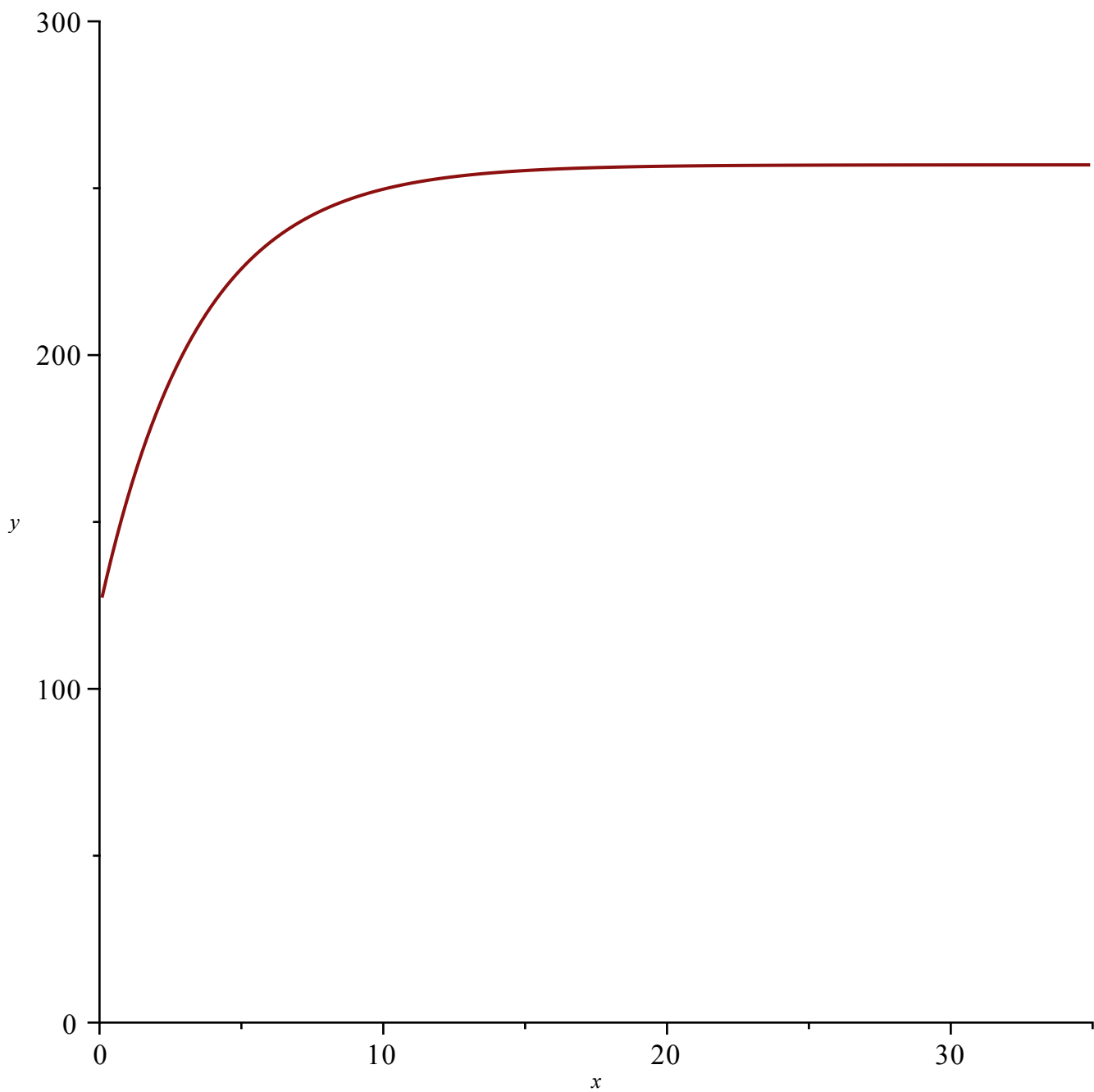
*Kilde: Marine Mammal Science*

$$f(x) := 257 - 133 \cdot 0.748^x :$$

a)

jeg plotter grafen

$plot(f(x), x = 0 \dots 35, y = 0 \dots 300)$



b)

For at bestemme alderen af en delfin med længden 200cm sætter jeg funktionen lig 200

$$f(x) = 200 \xrightarrow{\text{solve for } x} [[x = 2.918171674]]$$

delfinens alder når den er 200cm lang er 2.92 år

c)

jeg sætter 7 ind på x og tager den afledte funktion

$$f'(7) = 5.059272805$$

Længden af en 7 år gammel delfin vokser med en hastighed på ca. 5,06 cm pr. år.

## Opgave 9

*restart, with (Gym) :*

**Opgave 9** I et koordinatsystem er vektorerne  $\vec{a}$  og  $\vec{b}$  givet ved

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

a) Bestem skalarproduktet  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ .

b) Bestem koordinatsættet til projektionen  $\vec{b}_a$  af vektor  $\vec{b}$  på vektor  $\vec{a}$ .

a)  
jeg bestemmer skalarproduktet

$$\text{dotP}(\langle 6, 3 \rangle, \langle -2, 7 \rangle) = 9$$

b)  
Jeg bestemmer projektionens koordinatsæt

$$\text{proj}(\langle -2, 7 \rangle, \langle 6, 3 \rangle) = \begin{bmatrix} \frac{6}{5} \\ \frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

## Opgave 10

*restart, with (Gym) :*

**Opgave 10** En lufthavn har to bagagebånd til udlevering af kufferter - et stort og et lille.

Båndene er indstillet, så  $\frac{1}{3}$  af kufferterne

udleveres på det lille bagagebånd.

En dag skal der udleveres 510 kufferter.

Den stokastiske variabel  $X$  betegner det antal kufferter, der udleveres på det lille bagagebånd.

Det antages, at  $X$  er binomialfordelt med antalsparameter  $n = 510$  og sandsynligheds-

parameter  $p = \frac{1}{3}$ .

a) Bestem sandsynligheden  $P(X = 170)$ .

Et år senere skal en statistiker undersøge, om indstillingen af båndene har ændret sig. Statistikerens udfører et tosidet binomialtest med et signifikansniveau på 5 % og nulhypotesen

$$H_0: \frac{1}{3} \text{ af kufferterne bliver udleveret på det lille bagagebånd.}$$

I en stikprøve på 90 tilfældigt udvalgte kufferter viser det sig, at 21 kufferter bliver udleveret på det lille bagagebånd.

b) Bestem acceptområdet for dette test, og afgør, om nulhypotesen kan forkastes.



Billedkilde: pixtastock

a)

Jeg får oplyst, at den stokastiske variabel  $X$  tæller antallet af kufferter, der udleveres på det lille bagagebånd, i en lufthavn med to bagagebånd.

Jeg får også oplyst, at  $X \sim b(510, 1/3)$ . Jeg bestemmer sandsynligheden  $P(X=170)$ :

$$\text{binpdf}\left(510, \frac{1}{3}, 170\right) = 0.03745267689$$

Sandsynligheden er 3.75%

b)

Jeg får oplyst, at en statistiker udfører et tosidet binomialtest med et signifikansniveau på 5% og nulhypotesen:

$H_0: 1/3$  af kufferterne bliver udleveret på det lille bagagebånd.

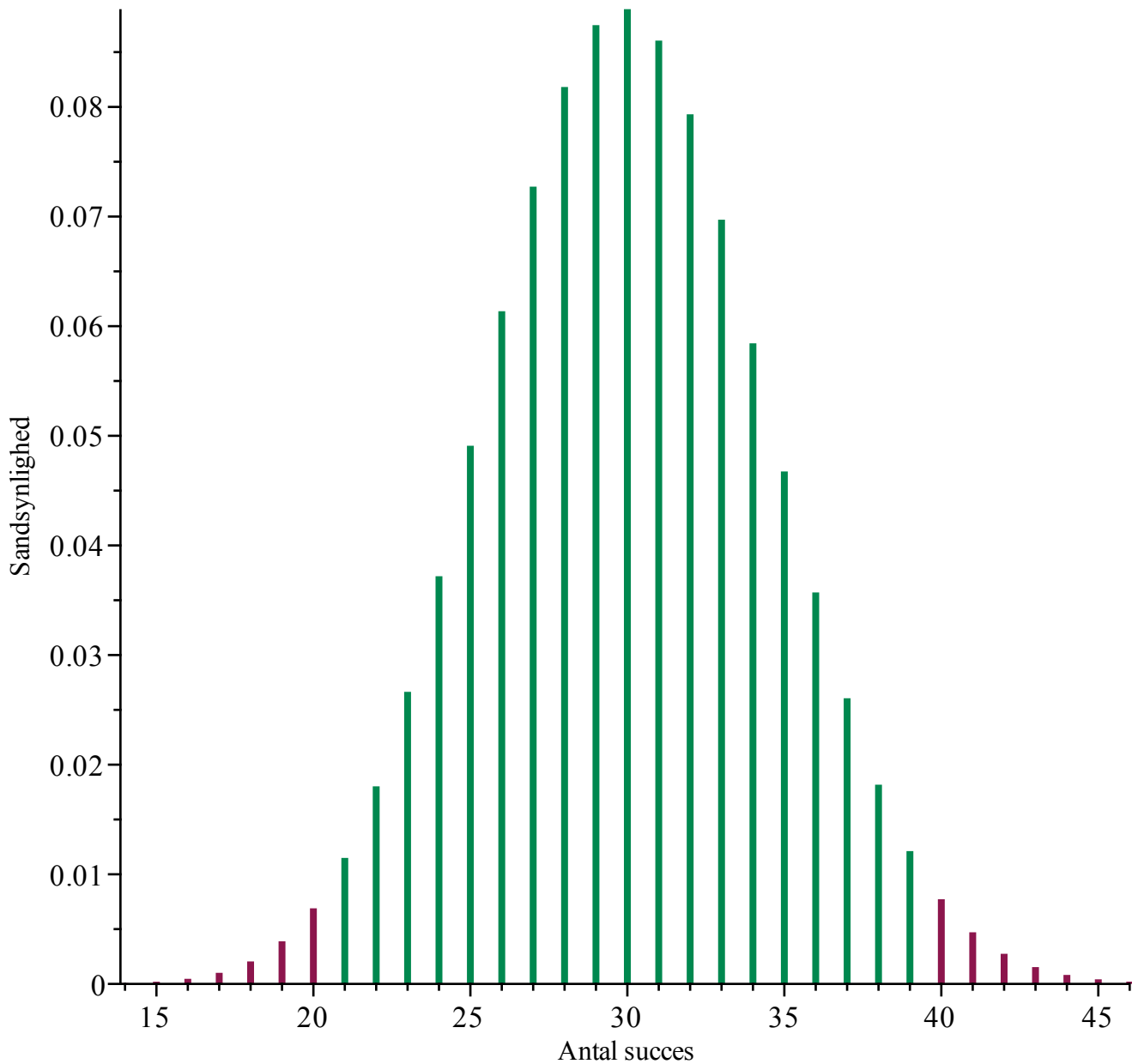
Den alternative hypotese er dermed:

$H_1$ : Andelen af kufferter, der bliver udleveret på det lille bagagebånd, er ikke  $1/3$ .

Jeg får også oplyst, at der laves en stikprøve bestående af 90 kufferter. Jeg lader  $X$  være en binomialfordelt stokastisk variabel, der tæller antallet af kufferter, der bliver udleveret på det lille bagagebånd.  $X$  har antalsparameteren  $n = 90$ .

$$\text{binomialTest}\left(90, \frac{1}{3}, 0.05, \text{tosidet}\right)$$

Tosidet test  
Acceptområde = {21, ..., 39}



Acceptområde = {21, ..., 39}

Jeg får oplyst, at 21 ud af 90 kufferter blev udleveret på det lille bagagebånd. Da 21 tilhører acceptområdet, så kan nulhypotesen ikke forkastes.

## Opgave 11

*restart, with (Gym) :*

**Opgave 11** En funktion  $f$  er givet ved

$$f(x) = -x^4 + x^3 + 2x^2.$$

a) Bestem monotoniforholdene for  $f$ .

b) Løs ligningen  $f(x) = 2$ .

En vandret linje  $l$  har ligningen  $y = k$ , hvor  $k$  er et tal.

c) Bestem de værdier af tallet  $k$ , for hvilke linjen  $l$  har netop 3 punkter fælles med grafen for  $f$ .

$$f(x) := -x^4 + x^3 + 2 \cdot x^2 :$$

a)  
Jeg bestemmer monotoniforholdet ved først at tage den afledte af  $f$  og sætte lig nul  
 $\text{solve}(f'(x) = 0., x)$

$$0., 1.443000468, -0.6930004682$$

**(3.11.1)**

Nulpunkterne for  $f'$  er  $x_1 = -0.6930004682$  og  $x_2 = 0$  og  $x_3 = 1.443000468$

Jeg bestemmer nu fortegnet for  $f'$  omkring nulpunkterne

$$f'(-1) = 3$$

$$f'(-0.5) = -0.750$$

$$f'(1) = 3$$

$$f'(2) = -12$$

monotoniforholdet er altså

$f$  er voksende i intervallet  $]-\infty; -0.693]$  og  $[0; 1.443]$

$f$  er aftagende i intervallet  $[-0.693; 0]$  og  $[1.443; \infty[$

*restart, with(Gym) :*