

with (Gym) :

# Gamle eksamensopgaver af STXmatematik

## 1stx251\_MAT\_A\_22052025

Del 1: uden hjælpemidler

### Opgave 1

**Opgave 1** En funktion  $f$  af to variable er givet ved

$$f(x, y) = 3e^x + x^2 \cdot y + y^2.$$

a) Bestem  $f(0, 4)$ .

b) Bestem  $f'_y(x, y)$ .

a)

$$f(0, 4) = 3e^0 + 0^2 \cdot 4 + 4^2 = 3 + 16 = 19$$

b)

$$\frac{\partial}{\partial y} (3e^x + x^2 \cdot y + y^2) = 3e^x + 2x \cdot y$$

### Opgave 2

**Opgave 2** En normalfordelt stokastisk variabel  $X$  har middelværdi  $\mu = 20$  og spredning  $\sigma = 5$ .

a) Bestem  $P(20 \leq X \leq 30)$ .

a)

Brug formelen  $\mu \pm 2\sigma$

$$30 = 20 \pm 5 \cdot 2 \Leftrightarrow 30 = 20 \pm 10 \Rightarrow P(10 \leq X \leq 30) = 0.95$$

Normalfordelingen er symmetrisk omkring 20, så er sandsynligheden for at ligge mellem 10 og 20 lige så stor som sandsynligheden for at ligge mellem 20 og 30, vi kan derfor bare dividere de 0.95 med 2

$$P(20 \leq X \leq 30) = \frac{0.95}{2} = 0.475$$

### Opgave 3

**Opgave 3** a) Reducér udtrykket

$$\frac{(3a-b)^2 - b^2}{a}$$

a)

$$\frac{(3a-b)^2 - b^2}{a}$$

Udvid parentes

$$\frac{9a^2 + b^2 - 6ab - b^2}{a}$$

b i anden går ud

$$\frac{9a^2 - 6ab}{a}$$

a går ud

$$9a - 6b$$

### Opgave 4

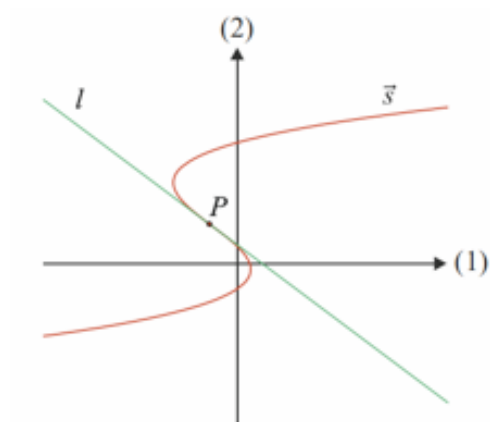
**Opgave 4** Figuren viser banekurven for en vektorfunktion  $\vec{s}$  givet ved

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} t^3 - 4t - 2 \\ 3t + 3 \end{pmatrix}$$

**a)** Bestem koordinatsættet til banekurvens skæringspunkt med førsteaksen.

Linjen  $l$  er tangent til banekurven i punktet  $P$ , hvor  $t = 0$ .

**b)** Bestem en parameterfremstilling for  $l$ .



a)

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} t^3 - 4t - 2 \\ 3t + 3 \end{pmatrix}$$

for at bestemme koordinatsættet til banekurvens skæringspunkt med førsteakse sætter man  $y(t) = 0$

$$3t + 3 = 0 \Rightarrow t = -1$$

Indsæt denne  $t$  værdi i  $x(t)$

$$(-1)^3 - 4 \cdot (-1) - 2 = -1 + 4 - 2 = 1$$

Skæringspunktet er dermed  $(1, 0)$

b)

Tag den afledte af vektorfunktionen

$$\vec{s}'(t) = \begin{pmatrix} 3t^2 - 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

indsæt nu  $t = 0$

$$\vec{s}'(0) = \begin{pmatrix} 3 \cdot 0^2 - 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Dette er også retningsvektoren

$$\vec{s}'(0) = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} = \vec{r}$$

Nu skal man finde positionsvektoren ved at sætte  $t = 0$  ind i  $\vec{s}(t)$

$$\vec{s}(0) = \begin{pmatrix} 0^3 - 4 \cdot 0 - 2 \\ 3 \cdot 0 + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Da man nu kender retningsvektor og positionsvektoren kan man danne en parameterfremstilling

$$l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

## Opgave 5

**Opgave 5** En funktion  $f$  er løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = 2x^2 + x + \frac{y}{x}.$$

- a) Bestem en ligning for tangenten til grafen for  $f$  i punktet  $P(3,12)$ .  
b) Undersøg, om funktionen  $g(x) = x^3 + x^2 + 5x$  er en løsning til differentialligningen.

a)

Da man allerede kender punktet kan man indsætte det i differentialligningen, fordi så finder man tangentens hældning

$$\frac{dy}{dx} = 2 \cdot 3^2 + 3 + \frac{12}{3} = 2 \cdot 9 + 3 + 4 = 25$$

Da jeg nu kender hældningen  $a$  og et punkt kan jeg finde  $b$  værdien via formlen  $b = y_0 - a \cdot x_0$   
 $b = 12 - 25 \cdot 3 = 12 - 75 = -63$

Nu kan man opstille ligningen for tangenten:  $y = 25 \cdot x - 63$

b)

For at undersøge om  $g(x)$  er en løsning kan man starte med at tage den afledte af  $g(x)$

$$g'(x) = 3x^2 + 2x + 5$$

Denne afledte kan jeg indsætte på  $\frac{dy}{dx}$  pladsen også kan jeg erstatte  $y$  i differentialligningen med  $g(x)$  og hvis højre og venstre side kommer til at være lig hinanden er  $g(x)$  en løsning

$$3x^2 + 2x + 5 = 2x^2 + x + \frac{x^3 + x^2 + 5x}{x}$$

Forkort brøken

$$3x^2 + 2x + 5 = 2x^2 + x + x^2 + x + 5$$

Nu samler man bare værdierne

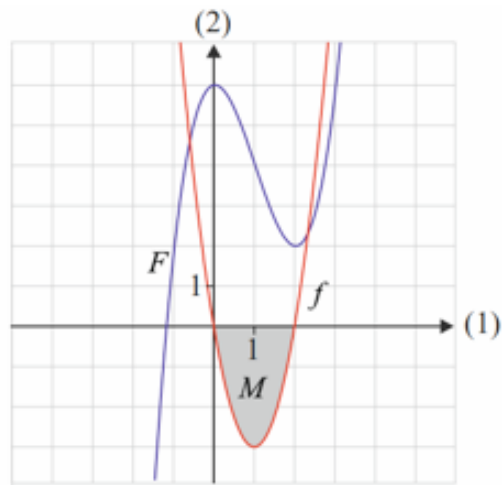
$$3x^2 + 2x + 5 = 3x^2 + 2x + 5$$

Da højre side ligner den venstre er  $g(x)$  altså en løsning til differentialligningen

**Opgave 6**

**Opgave 6** Figuren viser graferne for funktionerne  $f$  og  $F$ , hvor  $F$  er en stamfunktion til  $f$ .  
Grafen for  $f$  afgrænser sammen med førsteaksen en punktmængde  $M$ , der har et areal.

*Bilag vedlagt* a) Bestem arealet af  $M$ .  
Brug bilaget.



a)

Opgaven her kan løses på 2 forskellige måder. Den første metode er at kigge på forholdet mellem stamfunktionen og funktionen altså  $F'(x) = f(x)$ . Vi kan derfor kigge på integralet når den bliver sat op. Intervallet læses ved at kigge på  $f$  skæringspunkter som er  $[0, 2]$ . Da funktionen ligger under x-aksen skal integralet være negativt for at finde et areal

$$-\int_0^2 f(x) dx = -[F(x)]_0^2$$

Da integralet er negativt kan man flippe intervallet

$$-\int_0^2 f(x) dx = [F(x)]_2^0 = F(0) - F(2)$$

Dette kan nu løses ved at aflæse hvilke værdier korresponderer med

$$F(0) = 6 \text{ og } F(2) = 2$$

så dermed er

$$F(0) - F(2) = 6 - 2 = 4$$

Opgaven kan også løses ved at aflæse  $f$  og finde dens funktion

$$f(x) = 3x^2 - 6x$$

Denne funktion kan nu indsættes i integralet og løses

$$-\int_0^2 3x^2 - 6x dx = -[x^3 - 3x^2]_0^2 = -(2^3 - 3 \cdot 2^2) = -(8 - 12) = 4$$

## Opgave 7

### Opgave 7 En funktion $f$ er givet ved

$$f(x) = \ln(x^2 + 7x + 20).$$

a) Bestem  $f'(x)$ .

a)  
For at bestemme den afledte af  $f(x)$ , vil man bruge formelsamlingen  
Jeg bruger formelen for sammetsat funktioner som også hedder kædereglen  
 $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

$$f'(x) = \frac{1}{x^2 + 7x + 20} \cdot 2x + 7 = \frac{2x + 7}{x^2 + 7x + 20}$$

Dermed er den afledte funktion fundet

### Opgave 8

#### Opgave 8



Billedkilde: depositphotos

Erfaringen viser, at et bestemt fodboldhold vinder 32 % af dets kampe.  
Holdet scorer det første mål i 20 % af de kampe, det spiller.  
Holdet vinder 60 % af de kampe, hvor det scorer det første mål.

a) Bestem sandsynligheden for, at holdet vinder,  
givet at holdet ikke scorer det første mål i en kamp.

a)  
For at bestemme sandsynligheden for at holdet vinder, givet at de ikke scorer det første mål, kan man starte med at finde sandsynligheden for at holdet ikke scorer først

$$P(\bar{M}) = 1 - P(M) = 1 - 0.20 = 0.8$$

Vi ved også, at den samlede sandsynlighed for at vinde  $P(V)$  kan skrives op ved hjælp af loven om total sandsynlighed

$$P(V) = P(V \cap M) + P(V \cap \overline{M})$$

Ved at omskrive med betingede sandsynligheder, får vi formelen:

$$P(V) = P(V|M) \cdot P(M) + P(V|\overline{M}) \cdot P(\overline{M})$$

Vi kender næsten alle tallene og kan indsætte dem direkte:

$$0.32 = 0.60 \cdot 0.20 + P(V|\overline{M}) \cdot 0.80$$

Reduceres udtrykket fås

$$P(V|\overline{M}) = \frac{0.20}{0.80} = 0.25$$

Sandsynligheden for, at holdet vinder, givet at det ikke scorer det første mål, er 0.25

## Opgave 9

**Opgave 9** En funktion  $f$  er givet ved

$$f(x) = x^2 - 6x + 11.$$

Det oplyses, at  $F$  er en stamfunktion til  $f$ , og at grafen for  $F$  har linjen med ligningen  $y = 2x - 5$  som tangent.

a) Bestem en forskrift for  $F$ .

a)

For at bestemme en forskrift for  $F$  kan man starte med bare at finde den generelle stamfunktion til  $f$

$$\int x^2 - 6x + 11 \, dx = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 11x + c$$

Vi ved også at tangenten til  $F$  har hældningen 2. Denne værdi kan vi sætte lig med  $f(x)$  for at finde hældningen i røringpunktet

$$x^2 - 6x + 11 = 2$$

Træk 2 over på den anden side

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$

Denne kan faktorerises

$$(x - 3)^2 = 0$$

Nu bruges nulreglen til at finde  $x$

$$x = 3$$

Denne  $x$ -værdi kan man sætte ind i  $y$

$$y = 2 \cdot 3 - 5 = 1$$

Røringpunktet er altså  $(3, 1)$

Denne punkt kan man sætte ind i den generelle stamfunktion for at finde konstanten  $c$

$$1 = \frac{3^3}{3} - 3 \cdot 3^2 + 11 \cdot 3 + c$$

Nu isoleres der bare for  $c$

$$1 = 9 - 27 + 33 + c$$
$$-14 = c$$

nu er konstanten fundet og den sættes ind i stamfunktionen

$$F(x) = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 11x - 14$$

Del 2: med hjælpemidler

## Opgave 10

**Opgave 10** En funktion  $f$  af to variable er givet ved

$$f(x, y) = \frac{4 \cdot \sin(x) + y^2 - 4}{y}.$$

**a)** Undersøg, om punktet  $\left(\frac{\pi}{3}, 2, \sqrt{2}\right)$  ligger på grafen for  $f$ .

$$f(x, y) := \frac{4 \cdot \sin(x) + y^2 - 4}{y} :$$

a)

For at teste om punktet ligger på grafen vil jeg sætte  $x$  og  $y$  koordinaten fra punktet ind i funktionen og se om jeg får den samme  $z$  værdi som i punktet

$$f\left(\frac{\pi}{3}, 2\right) = \sqrt{3}$$

Punktet ligger altså ikke på grafen for  $f$ , da  $\left(\frac{\pi}{3}, 2, \sqrt{2}\right) \neq \left(\frac{\pi}{3}, 2, \sqrt{3}\right)$

## Opgave 11

*restart; with (Gym) :*

**Opgave 11** En vektorfunktion  $\vec{s}$  er givet ved

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} t^3 - 5t^2 + 6t + 2 \\ \frac{1}{3}t^3 - t^2 + 1 \end{pmatrix}, \quad -1 \leq t \leq 4.$$

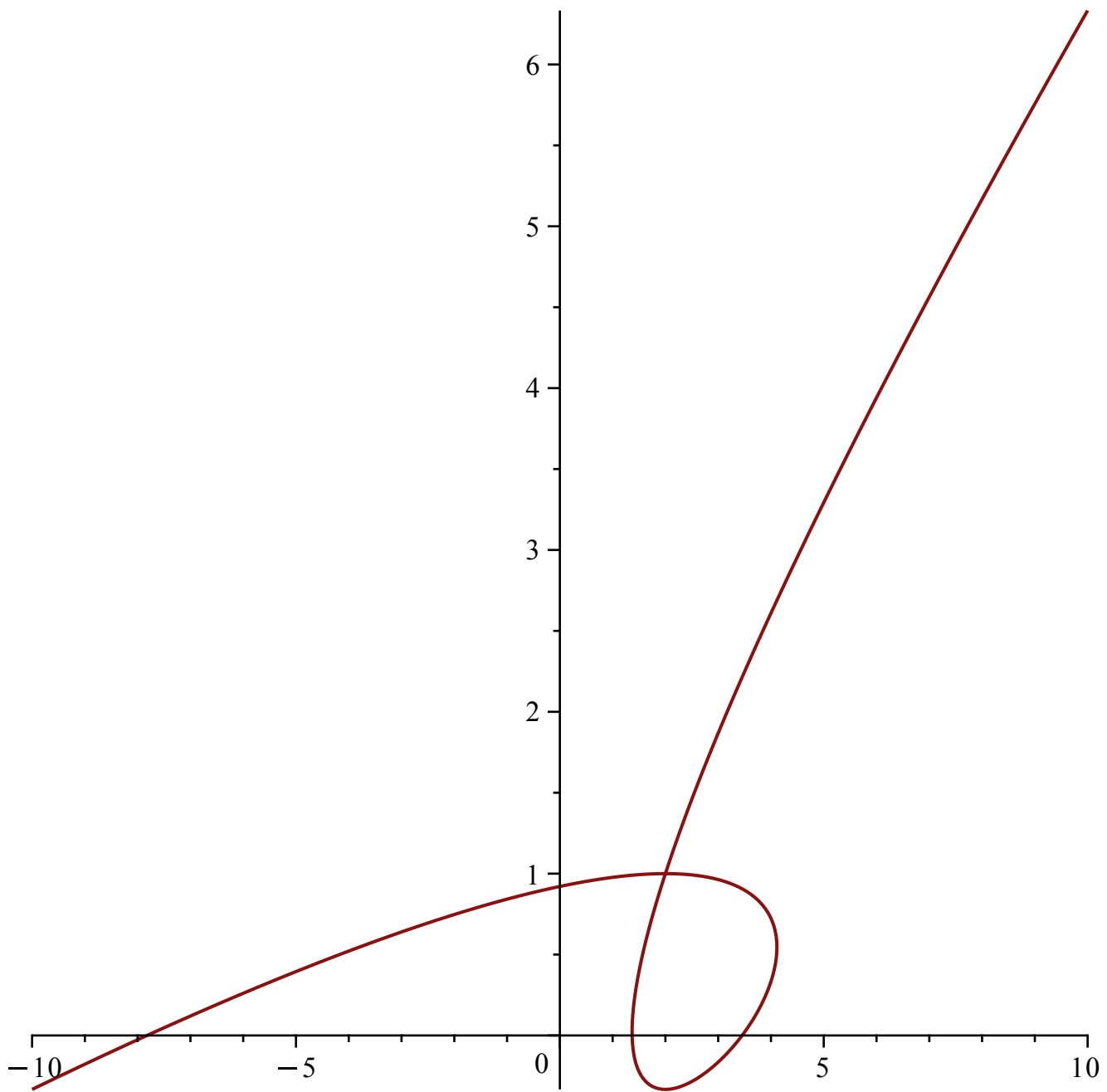
- a) Tegn banekurven for  $\vec{s}$ .
- b) Bestem koordinatsættene til de punkter på banekurven, hvor tangenten er lodret.

$$s(t) := \left\langle t^3 - 5 \cdot t^2 + 6 \cdot t + 2, \frac{1}{3} \cdot t^3 - t^2 + 1 \right\rangle :$$

a)

For at tegne banekurven vil jeg bruge kommandoen vektorplot

`vektorPlot(s(t), t=-1..4)`



b)

For at bestemme koordinaterne til de punkter hvor tangenten er lodret vil jeg først starte med at tage den afledte af vektorfunktionen

$$s'(t) = \begin{bmatrix} 3t^2 - 10t + 6 \\ t^2 - 2t \end{bmatrix}$$

Og jeg ved at når den skal være lodret så skal jeg sætte  $x'(t) = 0$

$$3 \cdot t^2 - 10t + 6 = 0 \xrightarrow{\text{solve } 3t^2 - 10t + 6 = 0} \left[ \left[ t = \frac{5}{3} + \frac{\sqrt{7}}{3} \right], \left[ t = \frac{5}{3} - \frac{\sqrt{7}}{3} \right] \right] \quad (1.11.1)$$

$$\xrightarrow{\text{at 5 digits}} \quad [ [t = 2.5486], [t = 0.78478] ] \quad (1.11.2)$$

Nu kender jeg t-værdierne og dem sætter jeg ind i  $s(t)$

$$[s(2.5486), s(0.78478)] \xrightarrow{\text{at 5 digits}} \left[ \left[ \begin{array}{c} 1.3689 \\ 0.022665 \end{array} \right], \left[ \begin{array}{c} 4.1126 \\ 0.54523 \end{array} \right] \right]$$

punkterne hedder altså: (4.1126, 0.54523) og (1.3689, 0.022665)

## Opgave 12

### Opgave 12



Billedkilde: apollorejser

På et vinslot i Portugal produceres hvidvinen Vinho Verde. Tabellen viser pH-værdien for 98 tilfældigt udvalgte flasker hvidvin fra vinslottet.

pH-værdi	2,89	2,92	...	3,61	3,72
----------	------	------	-----	------	------

Alle tabellens 98 værdier findes i bilaget "VinhoVerde.xlsx"

- a) Gør rede for, at pH-værdien af hvidvinen i flaskerne med god tilnærmelse kan beskrives ved en normalfordelt stokastisk variabel  $X$ .

Den ideelle pH-værdi for Vinho Verde ligger mellem 3,2 og 3,4.

- b) Bestem sandsynligheden for, at hvidvinen fra en tilfældigt udvalgt flaske fra vinslottet ikke har en ideel pH-værdi.

Kilde: kaggle

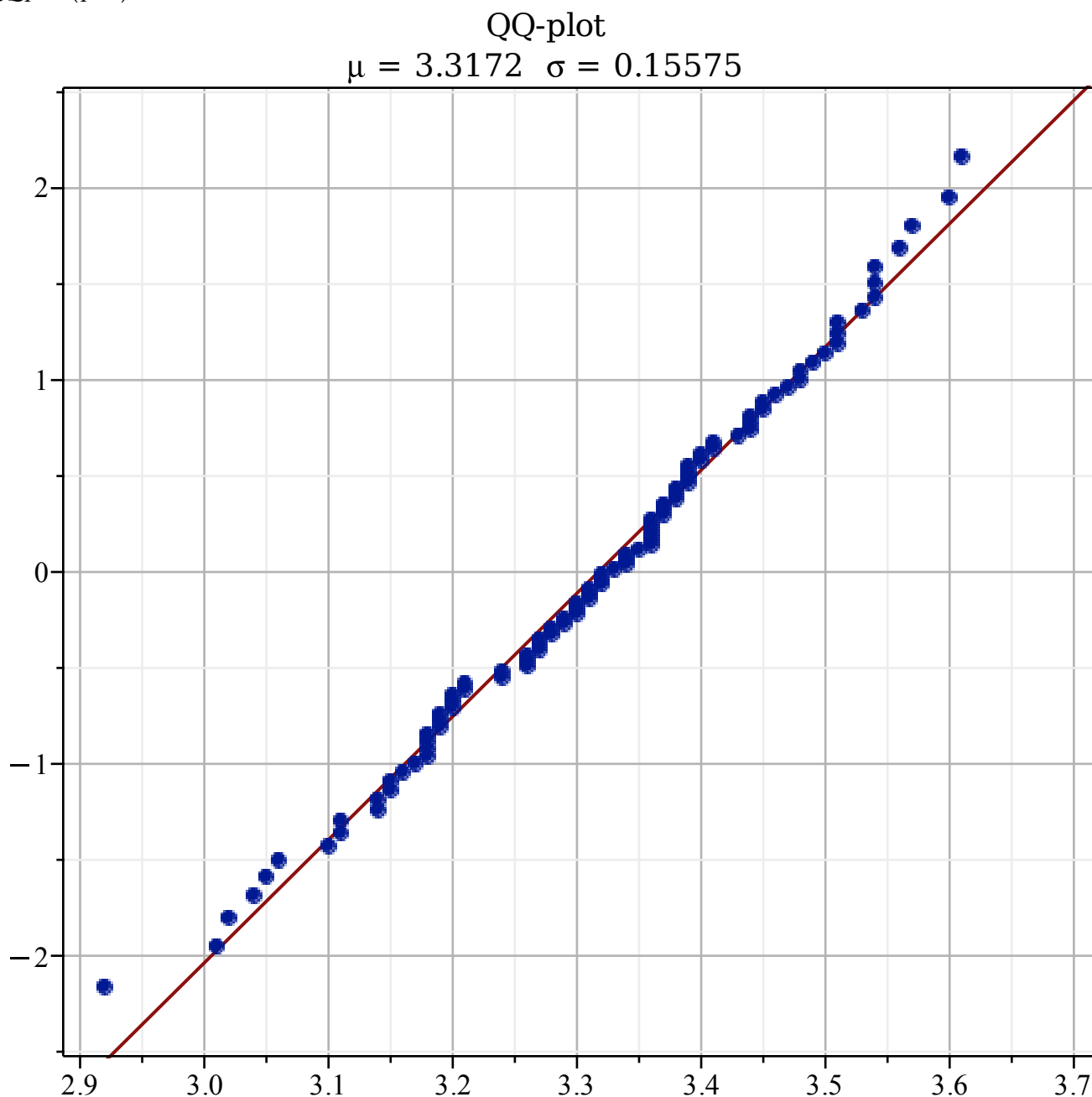
restart, with (Gym) :

$pH := [2.89, 2.92, 3.01, 3.02, 3.04, 3.05, 3.06, 3.1, 3.11, 3.11, 3.14, 3.14, 3.15, 3.15, 3.16, 3.17, 3.18, 3.18, 3.18, 3.19, 3.19, 3.19, 3.2, 3.2, 3.2, 3.21, 3.21, 3.24, 3.24, 3.26, 3.26, 3.26, 3.27, 3.27, 3.27, 3.28, 3.28, 3.29, 3.29, 3.3, 3.3, 3.3, 3.31, 3.31, 3.31, 3.32, 3.32, 3.32, 3.33, 3.34, 3.34, 3.34, 3.35, 3.36, 3.36, 3.36, 3.36, 3.36, 3.36, 3.37, 3.37, 3.37, 3.38, 3.38, 3.38, 3.39, 3.39, 3.39, 3.39, 3.4, 3.4, 3.41, 3.41, 3.43, 3.44, 3.44, 3.44, 3.45, 3.45, 3.46, 3.47, 3.48, 3.48, 3.49, 3.5, 3.51, 3.51, 3.51, 3.53, 3.54, 3.54, 3.54, 3.56, 3.57, 3.6, 3.61, 3.72]$ :

a)

For at vurderer om pH-værdien af hvidvinen i flaskerne kan beskrives via en normalfordelt stokastisk variable X, vil jeg benytte mig af kommandoen QQplot

$QQplot(pH)$



Ud fra QQplottet kan jeg konkludere, at datapunkterne ligger fint langs den rette linje, så dataene vil sagtens kunne beskrives via en normalfordelt stokastisk variabel X

b)

For at bestemme sandsynligheden for at pH-værdien ikke ligger mellem 3.2 og 3.4 vil jeg integrere tæthedsfunktionen. Til det skal jeg kende middelværdien og spredningen. Disse værdier fik vi fra QQplottet

$$\text{tæthedsfunktion: } f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Jeg opstiller integrallerne

$$1 - \left( \int_{-\infty}^{3.4} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 0.15575} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-3.3172}{0.15575}\right)^2} dx - \int_{-\infty}^{3.2} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 0.15575} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-3.3172}{0.15575}\right)^2} dx \right) =$$

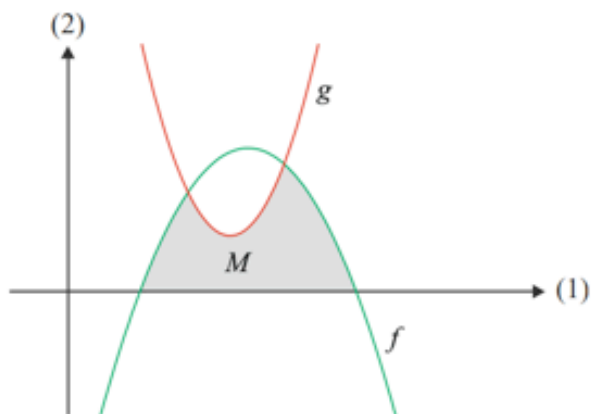
0.5233730270

Sandsynligheden for at pH-værdien ikke ligger mellem 3.2 og 3.4 er altså lig med 0.52237 eller 52.237%

## Opgave 13

*restart, with (Gym) :*

### Opgave 13



To funktioner  $f$  og  $g$  er bestemt ved

$$f(x) = -x^2 + 5x - 4$$

$$g(x) = 2x^2 - 9x + 11$$

**a)** Bestem koordinatsættet til hvert af skæringspunkterne mellem graferne for  $f$  og  $g$ .

Et område  $M$  er afgrænset af førsteaksen, grafen for  $f$  og grafen for  $g$ .

**b)** Bestem omkredsen af  $M$ .

Når  $M$  drejes  $360^\circ$  omkring førsteaksen, fremkommer der et omdrejningslegeme.

**c)** Bestem rumfanget af omdrejningslegemet.

$$f(x) := -x^2 + 5 \cdot x - 4 :$$

$$g(x) := 2 \cdot x^2 - 9 \cdot x + 11 :$$

a)

For at bestemme koordinatsættet til hvert skæringspunkt mellem graferne for  $f$  og  $g$  sætter jeg bare funktionerne lig med hinanden og løser ligningen

$$f(x) = g(x) \xrightarrow{\text{solve for } x} \left[ \left[ x = \frac{5}{3} \right], [x = 3] \right]$$

Disse værdier sætter jeg ind i en af funktionerne for at finde den korresponderende  $y$ -værdi

$$f\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{14}{9}$$

$$f(3) = 2$$

Dermed er skæringspunkterne fundet  $\left(\frac{5}{3}, \frac{14}{9}\right)$  og  $(3, 2)$

b)

For at bestemme omkredsen af M vil jeg udnytte mig af kurvelængder  
jeg kender kun skæringspunkterne mellem f og g, men jeg mangler også skæringspunkterne med f og x-aksen. Jeg sætter derfor bare f lig 0

$$f(x) = 0 \xrightarrow{\text{solve for } x} [[x = 1], [x = 4]]$$

Nu har jeg alt hvad jeg skal bruge til at finde omkredsen

$$\text{Formel for kurvelængde: } L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

Jeg stiller et langt regnestykke op. Jeg skal finde 2 kurve længder en fra x-aksen op til første skæring mellem f og g, og derefter kurvelængden af g fra punkt til punkt. Derefter fra anden skæring ned til x-aksen igen. Også skal jeg finde distancen mellem skæringerne med f og g som bare er 3

$$\begin{aligned} & 3 + \int_1^{\frac{5}{3}} \sqrt{1 + f'(x)^2} dx + \int_{\frac{5}{3}}^3 \sqrt{1 + g'(x)^2} dx + \int_3^4 \sqrt{1 + f'(x)^2} dx \\ & 3 + \frac{15\sqrt{2}\sqrt{5}}{8} + \frac{5 \operatorname{arcsinh}(3)}{8} - \frac{5\sqrt{2}\sqrt{17}}{36} - \frac{\operatorname{arcsinh}\left(\frac{5}{3}\right)}{4} + \frac{7\sqrt{2}\sqrt{29}}{72} \\ & + \frac{\operatorname{arcsinh}\left(\frac{7}{3}\right)}{8} - \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\ln(1 + \sqrt{2})}{4} \end{aligned} \tag{1.13.1}$$

at 5 digits  
→

$$9.2997 \tag{1.13.2}$$

Omkredsen er dermed fundet til at være lig med 9.2997

c)

For at bestemme rumfanget af M, bruger jeg formlen for et omdrejningslegeme:  $V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx$

Da f er over g skal integralet for f være først

$$\pi \int_1^4 f(x)^2 dx - \pi \int_{\frac{5}{3}}^3 f(x)^2 - g(x)^2 dx = \frac{1163 \pi}{270} \xrightarrow{\text{at 5 digits}} 13.532$$

Dermed er rumfanget af omdrejningslegemet fundet til at være 13.532

## Opgave 14

restart, with (Gym) :

## Opgave 14



Billedkilde: chelseagardener

En blomsterbutik får leveret en container fyldt med havekrukker, der stammer fra tre forskellige producenter.

34 % af krukkerne er fra producent  $A$ .

41 % af krukkerne er fra producent  $B$ .

Resten af krukkerne er fra producent  $C$ .

3 % af krukkerne fra producent  $A$  er skårede.

4 % af krukkerne fra producent  $B$  er skårede.

1 % af krukkerne fra producent  $C$  er skårede.

a) Bestem sandsynligheden for, at en tilfældigt udvalgt krukke ikke er skåret.

Om en tilfældigt udvalgt krukke vides, at den er skåret.

b) Bestem sandsynligheden for, at krukken stammer fra producent  $B$ .

a)

For at finde sandsynligheden for, at en krukke ikke er skåret, finder vi først den samlede sandsynlighed for, at en krukke er skåret  $P(S)$  ved hjælp af loven om total sandsynlighed:

$$P(S) = P(S|A) \cdot P(A) + P(S|B) \cdot P(B) + P(S|C) \cdot P(C)$$

Værdierne indsættes:

$$P(S) = 0.03 \cdot 0.34 + 0.04 \cdot 0.41 + 0.01 \cdot 0.25 = P(S) = 0.0291$$

Nu bruges komplementærhændelsen til at finde sandsynligheden for, at krukken ikke er skåret

$$P(\bar{S}) = 1 - 0.0291 = 0.9709$$

Sandsynligheden for, at en tilfældigt udvalgt krukke ikke er skåret, er 0.9709 eller 97.09%

b)

Vi skal bestemme den betingede sandsynlighed  $P(B|S)$ . Til dette bruges Bayes' formel:

$$P(B|S) = \frac{P(S|B) \cdot P(B)}{P(S)}$$

Vi kender allerede alle værdierne fra de tidligere trin og indsætter dem i brøken:

$$P(B|S) = \frac{0.04 \cdot 0.41}{0.0291} = 0.5635738832$$

Hvis det vides, at en tilfældigt udvalgt krukke er skåret, er sandsynligheden for, at den stammer fra producent B, 0.5635738832 eller 56.36%

## Opgave 15

*restart, with (Gym) :*

**Opgave 15** I en model kan udviklingen i befolkningstallet i USA beskrives ved differentialligningen

$$y' = a \cdot y \cdot (387,6 - y),$$

hvor  $a$  er en konstant,  $y = f(x)$  er befolkningstallet (målt i mio.), og  $x$  er antal år efter 1989.

I 1989 var befolkningstallet 246,8 mio., og i 2019 var det 328,3 mio.

a) Bestem en forskrift for  $f$ .

*Kilde: United States Census Bureau, Verdensbanken*

a)

for at bestemme en forskrift for  $f$  kan jeg bruge kommandoen `dsolve`. Da jeg allerede kender nogle værdier kan jeg også indsætte disse i `dsolve`

`dsolve({y'(x) = a*y(x)*(387.6 - y(x)), y(0) = 246.8}, y(x))`

$$y(x) = \frac{1195746}{1760 e^{-\frac{1938 a x}{5}} + 3085} \quad (1.15.1)$$

For at finde  $a$ -værdien kan jeg bruge det andet kendte punkt som jeg kan indsætte  $2019 - 1989 = 30$

$$328.3 = \frac{1195746}{1760 e^{-\frac{1938 \cdot a \cdot 30}{5}} + 3085} \quad \xrightarrow{\text{solve } 328.3 = 1195746/(1760 \cdot \exp(-11628 \cdot a) + 3085)}$$

$$[[a = 0.00009890614639]] \quad (1.15.2)$$

Nu kan jeg opstille den endelige forskrift

$$y(x) = \frac{1195746}{1760 e^{-\frac{1938 \cdot 0.00009890614639 \cdot x}{5}} + 3085} = y(x) = \frac{1195746}{1760 e^{-0.03833602234 x} + 3085}$$

Den endelige reduceret:

$$y(x) = \frac{1195746}{1760 e^{-0.03833602234 x} + 3085}$$

## Opgave 16

restart, with (Gym) :

**Opgave 16** En funktion  $f$  er givet ved

$$f(x) = x^3 + 7x^2 + 8x.$$

a) Bestem monotoniforholdene for  $f$  ved hjælp af differentialregning.

En anden funktion  $g$  er givet ved

$$g(x) = x^3 + k \cdot x^2 + 8x,$$

hvor  $k$  er et tal.

b) For hvilke værdier af  $k$  har grafen for  $g$  to vandrette tangenter?

$$f(x) := x^3 + 7 \cdot x^2 + 8 \cdot x :$$

a)

Nu kan jeg differentiere min funktion

$$f'(x) = 3x^2 + 14x + 8$$

nu kan jeg følge løse listen til at finde monotoniforholdet. Derefter sætter jeg den afledte funktion lig med 0

$$f'(x) = 0 \xrightarrow{\text{solve}} \left\{ x = -\frac{2}{3} \right\}, \{ x = -4 \}$$

nu kan jeg sætte min  $x$  værdi ind i en tabel

og for at udregne de resterende skal jeg finde en  $x$ -værdi under 0, og en værdi over 0. Dem skriver jeg ind i tabellen

$x$	-6	-4	-2	$-\frac{2}{3}$	0
$f'(x)$	$f'(-6) = 32$	0	$f'(-2) = -8$	0	$f'(0) = 8$
	+		-		+

Nu kan jeg så danne monotoniforholdet

$f$  er aftagende på  $\left[ -4, -\frac{2}{3} \right]$

$f$  er voksende på  $] -\infty, -4]$  og

$$\left[ -\frac{2}{3}, \infty \right[$$

b)

Der bliver oplyst for en ny funktion

$$g(x) := x^3 + k \cdot x^2 + 8 \cdot x :$$

Den funktion har 2 vandrette tangenter når  $g'(x) = 0$  har 2 løsninger. Først vil jeg bestemme den afledte af

$g$

$$g'(x) = 2 k x + 3 x^2 + 8$$

Denne afledte funktion er en andengradspolynomium. Den har derfor to løsninger når diskriminanten er positiv

$$d = (2 \cdot k)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 8 > 0 \xrightarrow{\text{solve for } k} \left[ [k < -2\sqrt{6}], [2\sqrt{6} < k] \right]$$

Diskriminanten er positiv når  $k < -2\sqrt{6}$  eller  $2\sqrt{6} < k$

Det betyder at grafen for  $g$  har to vandrette tangenter når  $k < -2\sqrt{6}$  eller  $2\sqrt{6} < k$

*restart, with (Gym) :*

## 2stx251\_MAT\_A\_26052025

Del 1: uden hjælpemidler

### Opgave 1

**Opgave 1** En funktion  $f$  af to variable er givet ved

$$f(x, y) = 2x^3 + x^2 \cdot y - 5x \cdot y.$$

**a)** Bestem  $f(3, -2)$ .

a)

For at bestemme  $f(3, -2)$  sætter jeg bare det punkt ind på pladserne i funktionen

$$f(3, -2) = 2 \cdot 3^3 + 3^2 \cdot (-2) - 5 \cdot 3 \cdot (-2) = 54 + 12 = 66$$

Dermed er den løst

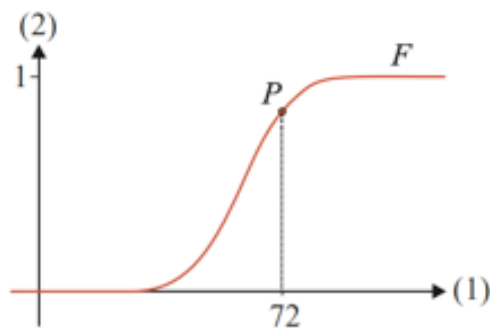
## Opgave 2

**Opgave 2** En normalfordelt stokastisk variabel  $X$  har middelværdi  $\mu = 60$  og spredning  $\sigma = 12$ .

a) Bestem intervallet for de normale udfald.

På figuren ses grafen for fordelingsfunktionen  $F$  for  $X$ . Punktet  $P$  ligger på grafen.

b) Bestem koordinatsættet til  $P$ .



a)

For at bestemme intervallet for de normale udfald, bruger jeg formelen for normal udfald:

$$[\mu - 2 \cdot \sigma, \mu + 2 \cdot \sigma]$$

Da jeg allerede kender både spredning og middelværdien kan jeg indsætte i formle og udregne.

$$[60 - 2 \cdot 12, 60 + 2 \cdot 12] = [36, 84]$$

Dermed er intervallet for de normale udfald bestemt.

b)

For at bestemme koordinatsættet til punktet  $P$ , kan jeg starte med at aflæse at dens  $x$ -koordinat er lig 72. For så at bestemme dens  $y$ -værdi, kan vi starte med at se at de 72 ligger præcis 1 spredning over middelværdien

$$72 = 60 + x \cdot 12 \Leftrightarrow 72 - x \cdot 12 = 60 \Leftrightarrow -x \cdot 12 = 60 - 72 \Leftrightarrow -x \cdot 12 = -12 \Leftrightarrow x = 1$$

Når vi har at gøre med en normalfordeling, gælder de klassiske procenter. De  $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$  er de 68.27%. Det betyder at der er  $100\% - 68.27\% = 31.73\%$  procent tilbage udenfor intervallet. Da fordelingen er symmetrisk, er der halvt så meget i den øvre hale

$$\frac{31.73\%}{2} = 15.865\%$$

Fordelingsfunktionen  $F(72)$  fortæller os sandsynligheden for at være under eller lig med 72. Det svarer til hele arealet undtagen den øvre hale:

$$F(72) = 100\% - 15.87\% = 84.13\% = 0.8413$$

Koordinatsættet til punktet  $P$  er  $(72; 0.8413)$ .

## Opgave 3

### Opgave 3 Der er givet ligningssystemet

$$2x + y = 7$$

$$4x + 3y = 9$$

a) Løs ligningssystemet.

a)  
for at løse det givne ligningssystem opstiller jeg ligningen som i en matrix

$$\begin{bmatrix} 2 \cdot x & y & 7 \\ 4 \cdot x & 3 \cdot y & 9 \end{bmatrix}$$

Formålet med denne måde at løse ligningssystemet på er at vi prøver at opnå en identitetsmatrix som faktisk ender med at give svaret.

Jeg kan se at første ligning kan ganges med 2, så vi kan opnå ens fortegn på x

$$\begin{bmatrix} 4 \cdot x & 2 \cdot y & 14 \\ 4 \cdot x & 3 \cdot y & 9 \end{bmatrix}$$

Hvis jeg nu trækker den første ligning fra den anden vil jeg kunne eliminere dens x-værdi

$$\begin{bmatrix} 4 \cdot x & 2 \cdot y & 14 \\ 0 & y & -5 \end{bmatrix}$$

Jeg har dermed opnået svaret til y som er lig med -5. Denne værdi kan jeg indsætte i den første ligning

$$\begin{bmatrix} 4 \cdot x & 2 \cdot (-5) & 14 \\ 0 & y & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \cdot x & -10 & 14 \\ 0 & y & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \cdot x & 0 & 24 \\ 0 & y & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 0 & 6 \\ 0 & y & -5 \end{bmatrix}$$

Dermed har jeg løst ligningssystemet.  $x = 6$  og  $y = -5$

### Opgave 4

#### Opgave 4 En differentialligning er givet ved

$$y' = 0,4 \cdot y \cdot (35 - y).$$

a) Bestem linjeelementet for differentialligningen i punktet  $P(0,5)$ .

b) Bestem en forskrift for den løsning  $f$  til differentialligningen, hvis graf går gennem punktet  $P$ .

a)

For at bestemme linjeelementet, vil jeg bruge dens formel  $(x_0, y_0, y'_0)$

for at finde den sidste koordinat vil jeg bare indsætte punktet i differential ligningen

$$y' = 0,4 \cdot 5 \cdot (35 - 5) = 2 \cdot (30) = 60$$

dermed har jeg fundet den sidste koordinat og kan nu opskrive hele punktet for linjeelementet  $(0, 5, 60)$

b)

For at bestemme en forskrift vil jeg bruge løsningsformlen til den specifikke differential ligning som er

$$y = \frac{M}{1 + c \cdot e^{-a \cdot M \cdot x}}$$

De kendte værdier kan jeg starte med at indsætte i løsningsformlen

$$y = \frac{35}{1 + c \cdot e^{-0,4 \cdot 35 \cdot x}}$$

For at finde konstanten kan jeg indsætte punktet

$$5 = \frac{35}{1 + c \cdot e^{-0,4 \cdot 35 \cdot 0}} \Leftrightarrow 5 = \frac{35}{1 + c \cdot e^0} \Leftrightarrow 5 = \frac{35}{1 + c} \Leftrightarrow 1 + c = 7 \Leftrightarrow c = 6$$

Dermed er konstanten fundet og den kan nu indsættes i løsningen

$$y = \frac{35}{1 + 6 \cdot e^{-0,4 \cdot 35 \cdot x}}$$

#### Opgave 5

**Opgave 5** I en bestemt filmklub er 15 % af medlemmerne rygere.

En undersøgelse viser, at 80 % af rygerne har gyserfilm som yndlingsfilm.

Undersøgelsen viser også, at 36 % af de medlemmer, der har gyserfilm som yndlingsfilm, er rygere.

a) Bestem sandsynligheden for, at et tilfældigt udvalgt medlem af filmklubben har gyserfilm som yndlingsfilm.

a)

R: Medlemmet er ryger.

G: Medlemmet har gyserfilm som yndlingsfilm.

Sandsynligheden for, at et medlem er ryger:

$$P(R) = 15 \% = 0.15$$

Sandsynligheden for, at et medlem kan lide gyserfilm, betinget af at medlemmet er ryger:

$$P(G | R) = 80 \% = 0.8$$

Sandsynligheden for, at et medlem er ryger, betinget af at medlemmet har gyserfilm som yndlingsfilm:

$$P(R | G) = 36 \% = 0.36$$

Vi ved fra definitionen af betinget sandsynlighed, at sandsynligheden for både at være ryger og elske gyserfilm, kan beregnes på to måder:

$$P(R \cap G) = P(G | R) \cdot P(R)$$

$$P(R \cap G) = P(R | G) \cdot P(G)$$

a begge udtryk er lig med det samme, kan vi sætte dem lig med hinanden:

$$P(G | R) \cdot P(R) = P(R | G) \cdot P(G)$$

Nu indsætter vi de kendte tal i ligningen:

$$0.8 \cdot 0.15 = 0.36 \cdot P(G) \Leftrightarrow 0.12 = 0.36 \cdot P(G) \Leftrightarrow P(G) = \frac{1}{3}$$

sandsynligheden for, at et tilfældigt udvalgt medlem har gyserfilm som yndlingsfilm, er  $\frac{1}{3}$

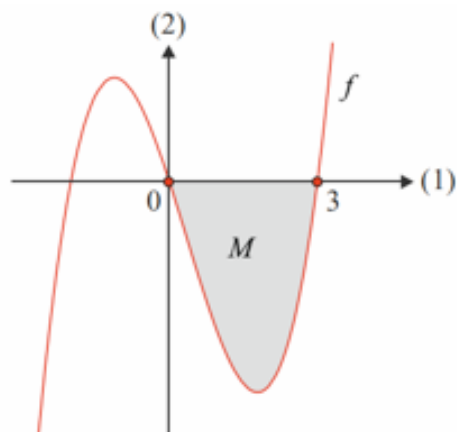
## Opgave 6

**Opgave 6** En funktion  $f$  er givet ved

$$f(x) = x^3 - x^2 - 6x.$$

Grafen for  $f$  afgrænser sammen med førsteaksen et område  $M$  i fjerde kvadrant.

a) Bestem arealet af  $M$ .



a)

For at bestemme arealet af  $M$  vil jeg tage integralet af funktionen mellem skæringspunkterne markeret på tegningen. Da  $M$  befinder sig under  $x$ -aksen skal jeg sætte et negativt tegn foran integralet, fordi ellers ville integral give en negativ værdi.

$$\begin{aligned} -\int_0^3 x^3 - x^2 - 6 \cdot x \, dx &= -\left[ \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 3 \cdot x^2 \right]_0^3 = -\left( \frac{3^4}{4} - \frac{3^3}{3} - 3 \cdot 3^2 \right) = -\left( \frac{81}{4} - \frac{27}{3} - 27 \right) = \\ &= -\left( \frac{81}{4} - \frac{36}{4} - \frac{108}{4} \right) = -\left( \frac{81 - 36 - 108}{4} \right) = -\left( -\frac{63}{4} \right) = \frac{63}{4} \end{aligned}$$

Dermed er arealet af  $M$  fundet

## Opgave 7

**Opgave 7** En funktion  $f$  er givet ved

$$f(x) = 2x^3 \cdot \ln(x) + 4x.$$

a) Bestem  $f'(x)$ .

a)

For at bestemme den afledte bruger jeg produktreglen og andre standardde regneregler

$$f'(x) = 6 \cdot x^2 \cdot \ln(x) + \frac{2 \cdot x^3}{x} + 4$$

dermed er den afledte fundet

## Opgave 8

### Opgave 8 a) Bestem integralet

$$\int \left( \frac{2x-6}{x^2-6x+13} \right) dx.$$

a)

For at bestemme integralet kan jeg starte med at spotte hvilken teknik jeg kan bruge. Jeg kan se at i nævneren at den funktion når den er afledt, kommer den til at være ens til tælleren. Det vil sige at jeg kan tage og bruge substitution

$$\int \left( \frac{2x-6}{x^2-6x+13} \right) dx$$

$$\text{Lad } u = x^2 - 6x + 13 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x - 6 \Leftrightarrow \frac{1}{2x-6} du = dx$$

$$\int \left( \frac{2x-6}{u} \right) \frac{du}{2x-6} = \int \left( \frac{1}{u} \right) du = \ln(u) + c = \ln(x^2 - 6x + 13) + c$$

dermed er integralet bestemt

$$\int \left( \frac{2x-6}{x^2-6x+13} \right) dx = \ln(x^2 - 6x + 13) + c$$

## Opgave 9

### Opgave 9 En vektorfunktion $\vec{s}$ er givet ved

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} t^2 - 2t - 8 \\ t^2 - 6t + c \end{pmatrix}, \text{ hvor } c \text{ er et tal.}$$

- a) Bestem  $t$ -værdierne til de punkter, hvor banekurven for  $\vec{s}$  skærer andenaksen.
- b) Bestem  $c$ , så førsteaksen er tangent til banekurven.

a)

For at finde de  $t$ -værdier som skærer andenaksen sætter jeg  $x(t) = 0$   
 $t^2 - 2t - 8 = 0$

Jeg bruger formlen for skæringspunkterne:  $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$$\frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 32}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{2 \pm 6}{2}$$

Dermed er t-værdierne fundet

$$t = 4 \wedge -2$$

b)  
For at bestemme c, vil jeg starte med at finde den afledte af  $y(t)$  og sætte lig nul

$$y'(t) = 2t - 6$$

$$2t = 6 \Leftrightarrow t = 3$$

Jeg indsætter denne t værdi i y for at finde c

$$y(3) = 3^2 - 6 \cdot 3 + c = 0$$

$$3^2 - 6 \cdot 3 + c = 0 \Leftrightarrow 9 - 18 + c = 0 \Leftrightarrow -9 + c \Leftrightarrow c = 9$$

For at førsteaksen er tangent til banekurven, skal  $c = 9$

Del 2: med hjælpemidler

## Opgave 10

*restart, with (Gym) :*

**Opgave 10** En funktion  $f$  af to variable er givet ved

$$f(x, y) = x^2 - y^2 + x \cdot y + 5y - 3.$$

**a)** Tegn grafen for  $f$  i området  $[-10; 10] \times [-10; 10] \times [-5; 15]$ .

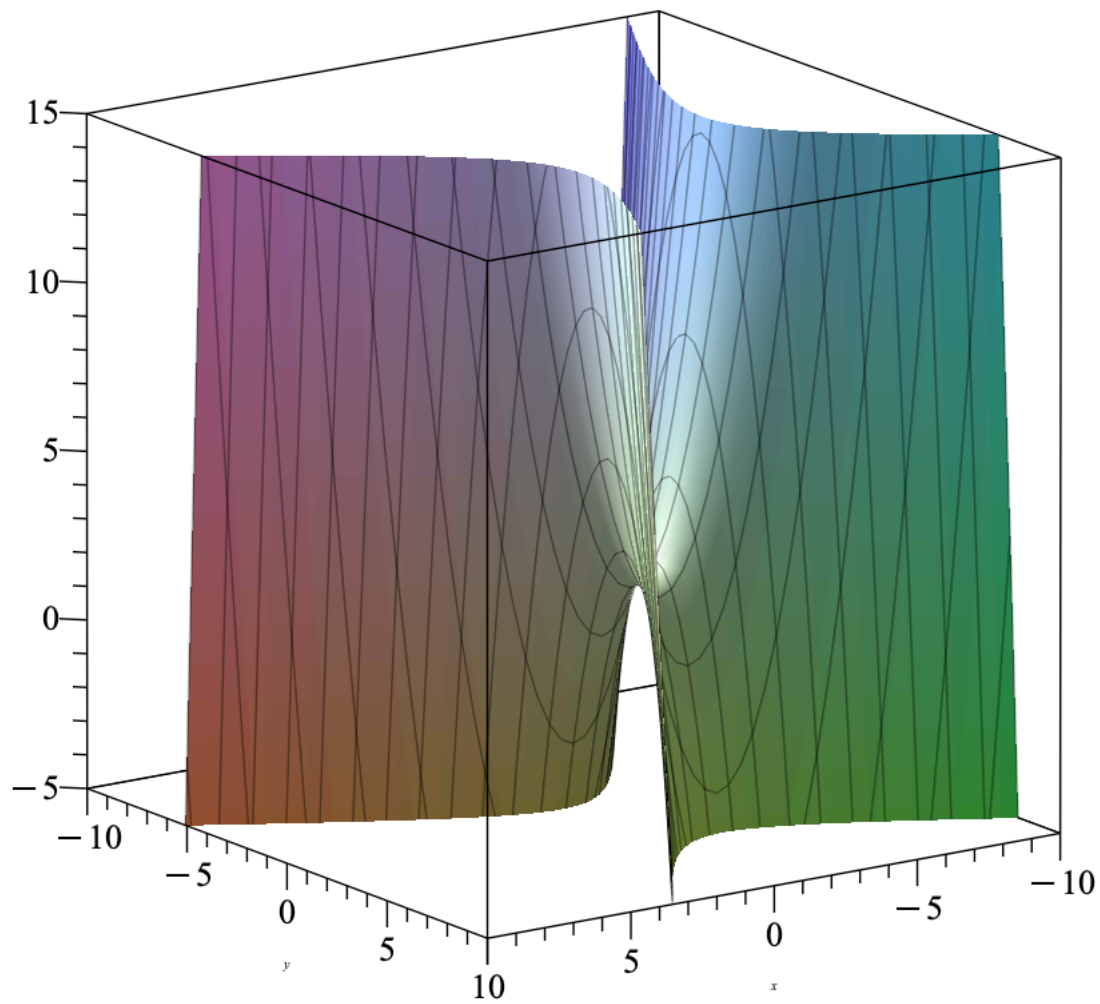
Det oplyses, at  $f$  har ét stationært punkt.

**b)** Bestem koordinatsættet til det stationære punkt.

$$f(x, y) := x^2 - y^2 + x \cdot y + 5 \cdot y - 3 :$$

a)  
Da jeg skal tegne grafen bruger jeg plot3d da det er en funktion af to variable

$$\text{plot3d}(f(x, y), x = -10 .. 10, y = -10 .. 10, view = -5 .. 15)$$



b)

For at finde det stationære punkt løser jeg

$$\text{solve}\left(\left\{\frac{\partial}{\partial x}(f(x, y)) = 0, \frac{\partial}{\partial y}(f(x, y)) = 0\right\}\right)$$

$$\{x = -1, y = 2\}$$

**(2.10.1)**

Nu indsætter jeg værdierne i funktionen for at finde z-værdien

$$f(-1, 2) = 2$$

dermed er koordinatsættet til det stationære punkt bestemt  $(-1, 2, 2)$

## Opgave 11

*restart, with (Gym) :*

**Opgave 11** En normalfordelt stokastisk variabel  $X$  har middelværdi  $\mu = 25$  og spredning  $\sigma = 7$ .

**a)** Bestem  $P(X \geq 30)$ .

For at bestemme sandsynligheden integrere jeg tæthedsfunktion

$$1 - \int_{-\infty}^{30} \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot 7}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-25}{7}\right)^2} dx \xrightarrow{\text{at 5 digits}} 0.23752$$

Dermed er sandsynligheden bestemt til at være 23.75%

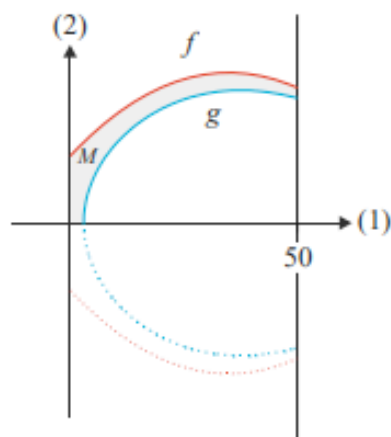
## Opgave 12

*restart, with (Gym) :*

## Opgave 12



Figur 1



Figur 2

To funktioner  $f$  og  $g$  er bestemt ved

$$f(x) = \frac{3}{200} \cdot (-x^2 + 70x + 990) \quad , \quad 0 \leq x \leq 50$$

$$g(x) = \frac{9-x^2}{130} + 6,8 \cdot \sqrt{x-3} \quad , \quad 3 \leq x \leq 50$$

Graferne for  $f$  og  $g$  afgrænser sammen med koordinatsystemets akser og linjen med ligningen  $x = 50$  et område  $M$ , se figur 2.

En krukke kan i en model beskrives ved det omdrejningslegeme, der fremkommer ved, at  $M$  drejes  $360^\circ$  om førsteaksen. I modellen har begge akser enheden cm.

- Bestem  $g(50)$ , og gør rede for, hvad dette tal fortæller om krukken.
- Benyt modellen til at bestemme rumfanget af det materiale, krukken er lavet af.

$$f(x) := \frac{3}{200} \cdot (-x^2 + 70 \cdot x + 990) :$$

$$g(x) := \frac{9-x^2}{130} + 6,8 \cdot \sqrt{x-3} :$$

a)

Jeg indsætter 50 på x's plads i g

$$g(50.) = 27.45691282$$

Dette betyder at krukken's åbning har en radius på 27.45691282 cm

b)

For at bestemme rumfanget bruger jeg formelen for et omdrejningslegeme:  $\pi \int_a^b f(x)^2 dx$

$V =$

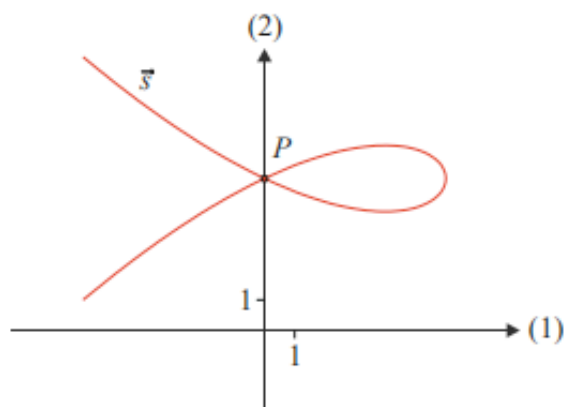
$$\pi \int_0^{50} f(x)^2 dx - \pi \int_3^{50} g(x)^2 dx = 39512.85705$$

Krukken er lavet af cirka  $39512.85705 \text{ cm}^3$  materiale (hvilket svarer til knap 39,5 liter).

## Opgave 13

restart, with(Gym) :

### Opgave 13



En vektorfunktion  $\vec{s}$  er givet ved

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3t^2 + 6 \\ t^3 - 2t + 5 \end{pmatrix}, \quad -2 \leq t \leq 2.$$

Længden  $L$  af en banekurve i et interval  $[t_1; t_2]$  kan bestemmes ved formelen

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \left( \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} \right) dt.$$

a) Bestem længden af banekurven for  $\vec{s}$  i intervallet  $[-2; 2]$ .

Banekurven for  $\vec{s}$  har et dobbeltpunkt  $P(0,5)$ .

b) Bestem ved brug af en formel vinklen mellem hastighedsvektorerne i punktet  $P$ .

$$s(t) := \langle -3 \cdot t^2 + 6, t^3 - 2 \cdot t + 5 \rangle :$$

$$x(t) := -3 \cdot t^2 + 6 :$$

$$y(t) := t^3 - 2 \cdot t + 5 :$$

a)

For at bestemme kurvelængden bruger jeg den givne formel

$L =$

$$\int_{-2}^2 \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$$

$$\frac{8\sqrt{61}}{3} + \frac{16 \operatorname{EllipticF}\left(\frac{6}{\sqrt{48-6\sqrt{3}}}, \sqrt{2} \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}\right)}{3(3+\sqrt{3})} \quad (2.13.1)$$

$$+ \frac{16\left(-\frac{4}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{3}\right) \operatorname{EllipticF}\left(\frac{6}{\sqrt{48-6\sqrt{3}}}, \sqrt{2} \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}\right)}{3+\sqrt{3}}$$

$$+ \frac{16\left(\frac{4}{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3}\right) \operatorname{EllipticPi}\left(\frac{6}{\sqrt{48-6\sqrt{3}}}, 1, \sqrt{2} \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}\right)}{3+\sqrt{3}}$$

at 5 digits  
→

27.808

(2.13.2)

Kurvelængden er dermed fundet

b)

Da jeg skal bruge en formel for at finde vinklen bruger jeg:  $\cos(\theta) = \frac{v_1 \cdot v_2}{|v_1| |v_2|}$

Først vil jeg starte med at finde de parameterværdier for t, jeg sætter derfor x funktionen lig 0

$$x(t) = 0 \xrightarrow{\text{solve for t}} \left[ [t = -\sqrt{2}], [t = \sqrt{2}] \right]$$

Jeg vil nu beregne hastighedsvektoren i de to t-værdier

$$s'(-\sqrt{2}) = \begin{bmatrix} 6\sqrt{2} \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$s'(\sqrt{2}) = \begin{bmatrix} -6\sqrt{2} \\ 4 \end{bmatrix}$$

jeg indsætter dem i formlen

$$\cos(\theta) = \frac{s'(-\sqrt{2}) \cdot s'(\sqrt{2})}{\sqrt{(6\sqrt{2})^2 + (4)^2} \cdot \sqrt{(-6\sqrt{2})^2 + (4)^2}} \xrightarrow{\text{isolate for theta}}$$

$$\theta = 180.000000 - 57.29577951 \arccos\left(\frac{7}{11}\right) \xrightarrow{\text{at 5 digits}} \theta = 129.52$$

Dermed er vinklen mellem hastighedsvektorene i punktet

## Opgave 14

*restart, with (Gym) :*

### Opgave 14



Billedkilde: fluentcrm

Et bestemt mailprogram kategoriserer alle modtagne e-mails, der indeholder ordet "tilbud", som spam.

$T$  betegner hændelsen, at en e-mail indeholder ordet "tilbud".  
 $S$  betegner hændelsen, at en e-mail er spam.

Det oplyses, at  $P(S) = 0,47$ ,  $P(T|S) = 0,10$  og  $P(T|\bar{S}) = 0,01$ .

- Bestem sandsynligheden for, at en tilfældig e-mail både indeholder ordet "tilbud" og er spam.
- Bestem sandsynligheden for, at en tilfældig e-mail er spam, givet at den indeholder ordet "tilbud".

a)

For at bestemme sandsynligheden for den inderholder tilbud og er spam skal jeg bestemme definition på betinget sandsynlighed:  $P(T \cap S) = P(T|S) \cdot P(S)$

$$P(T \cap S) = 0,47 \cdot 0,1 = 0,047$$

Dermed er sandsynligheden bestemt

b)

For at bestemme sandsynligheden for at en tilfældig mail er spam givet at den indeholder ordet tilbud vil

jeg bruge Bayes' sætning: 
$$P(S|T) = \frac{P(T|S) \cdot P(S)}{P(T)}$$

$$P(S|T) = \frac{0.1 \cdot 0.47}{P(T)}$$

$P(T)$  er den totale sandsynlighed for, at en e-mail indeholder ordet "tilbud". Den kan vi finde ved hjælp af loven om total sandsynlighed:  $P(T) = P(T \cap S) + P(T \cap \bar{S})$

$$P(T) = 0.047 + ((1 - 0.47) \cdot 0.01) = 0.0523$$

$$P(S|T) = \frac{0.1 \cdot 0.47}{0.0523} = 0.8986615679$$

Sandsynligheden for, at en tilfældig e-mail er spam, givet at den indeholder ordet "tilbud", er dermed ca. 89.9%.

## Opgave 15

*restart; with (Gym) :*

**Opgave 15** I en model for tømning af væske fra en bestemt beholder kan væskehøjden i beholderen beskrives ved differentialligningen

$$\frac{dh}{dt} = -0,035 \cdot \sqrt{h},$$

hvor  $h(t)$  er væskehøjden (målt i cm), og  $t$  er tiden (målt i sekunder), efter at tømningen af beholderen begynder.

- a) Bestem den hastighed, hvormed væskehøjden i beholderen ændrer sig, når væskehøjden er 125 cm.

Efter 180 sekunder falder væskehøjden i beholderen med en hastighed på 0,3 cm pr. sekund.

- b) Bestem en forskrift for  $h$ .

a)

For at finde hastigheden når jeg ved at væskehøjden er 125 cm skal jeg bare indsætte 125 ind på  $h$ 's plads i differentialligningen

$$h'(t) = -0.035 \cdot \sqrt{125} = -0.3913118962$$

Den falder altså med 0.39cm per sekundt

b)

Jeg vil bruge dsolve til at finde en forskrift for h

$$dsolve(h'(t) = -0.035 \cdot \sqrt{h(t)}, h(t))$$

$$\sqrt{h(t)} + \frac{7t}{400} - c_1 = 0 \quad (2.15.1)$$

isolate for h(t)  
→

$$h(t) = \left( -\frac{7t}{400} + c_1 \right)^2 \quad (2.15.2)$$

Da jeg nu har en forskrift for h, kan jeg indsætte denne ind i differentialligningen og sætte det kendte punkt ind hvor efter de 180 sekunder falder væskehøjden med hastigheden 0.3.

$$-0.3 = -0.035 \cdot \left( -\frac{7 \cdot 180}{400} + c_1 \right) \xrightarrow{\text{solve } -.3 = .1102500000-.35e-1*c\_1} [[c_1 = 11.72142857]] \quad (2.15.3)$$

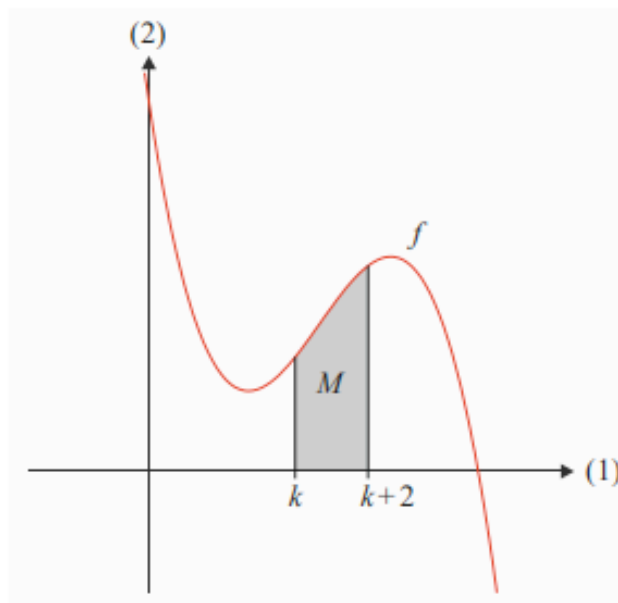
Nu kan jeg indsætte konstanten ind i funktionen

$$h(t) = \left( -\frac{7t}{400} + 11.72142857 \right)^2$$

## Opgave 16

restart, with(Gym) :

## Opgave 16



En funktion  $f$  er givet ved forskriften

$$f(x) = -\frac{1}{8} \cdot (x^3 - 14x^2 + 54x - 81).$$

- a) Bestem ved hjælp af differentialregning koordinatsættet til hvert af de punkter på grafen for  $f$ , hvor tangenten er vandret.

Grafen for  $f$  afgrænser sammen med førsteaksen og linjerne med ligningerne  $x = k$  og  $x = k + 2$  et område  $M$ , hvor  $0 \leq k \leq 7$ .

- b) Bestem den værdi af  $k$ , hvor arealet af  $M$  bliver mindst muligt.

$$f(x) := -\frac{1}{8} \cdot (x^3 - 14 \cdot x^2 + 54 \cdot x - 81) :$$

a)

For at finde de punkter vil jeg tage den afledte af  $f$  og sætte lig nul

$$f'(x) = 0 \xrightarrow{\text{solve for } x} \left[ \left[ x = \frac{14}{3} - \frac{\sqrt{34}}{3} \right], \left[ x = \frac{14}{3} + \frac{\sqrt{34}}{3} \right] \right]$$

Disse  $x$ -værdi indsætter jeg nu og finder den tilsvarende  $y$ -værdi

$$f\left(\frac{14}{3} - \frac{\sqrt{34}}{3}\right) \xrightarrow{\text{at 5 digits}} 2.198$$

$$f\left(\frac{14}{3} + \frac{\sqrt{34}}{3}\right) \xrightarrow{\text{at 5 digits}} 5.868$$

Koordinatsættene til de punkter på grafen for  $f$ , hvor tangenten er vandret, er tilnærmelsesvis

$$\left( \frac{14}{3} - \frac{\sqrt{34}}{3}, 2.198 \right) \text{ (lokalt minimum) og } \left( \frac{14}{3} + \frac{\sqrt{34}}{3}, 5.868 \right) \text{ (lokalt maksimum).}$$

b)

jeg finde den værdi af  $k$ , hvor arealet af området  $M$  er mindst muligt. Først definerer jeg en funktion for arealet,  $A(k)$ , ved at integrere  $f(x)$  fra  $k$  til  $k+2$ .

$$A(k) := \int_k^{k+2} f(x) dx :$$

For at finde minimum for dette areal, differentierer jeg arealfunktionen  $A(k)$  og løser ligningen  $A'(k) = 0$  for at finde de mulige  $k$ -værdier.

*evalf(minimize(A(k), k = 0 .. 7, location));*

$$4.86850563, \{ [ \{ k = 1.810745213 \}, 4.86850563 ] \} \quad \text{(2.16.1)}$$

både det mindste areal og den tilhørende  $k$ -værdi. Det absolutte minimumsareal er ca. 4,87, og dette opnås ved den  $k$ -værdi, der står i parentes.

Arealet af området  $M$  bliver altså mindst muligt, når  $k = 1.810745213$

*restart, with(Gym) :*

## stx252\_MAT\_A\_11082025

Del 1: uden hjælpemidler

### Opgave 1

**Opgave 1** En funktion  $f$  af to variable er givet ved

$$f(x, y) = x \cdot y^2 + 11y - \frac{x}{y}.$$

**a)** Bestem  $f(-4, 2)$ .

a)

jeg indsætter punktet i funktionen

$$f(-4, 2) = -4 \cdot 2^2 + 11 \cdot 2 - \frac{-4}{2} = -16 + 22 + 2 = 8$$

### Opgave 2

## Opgave 2 En vektorfunktion $\vec{s}$ er givet ved

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} t^3 - 3t^2 - 4t + 1 \\ 2t^2 - 1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestem  $\vec{s}'(t)$ .

b) Bestem længden  $|\vec{s}'(3)|$ .

a)

jeg tager den afledte af vektorfunktionen.

$$s'(t) = \begin{pmatrix} 3t^2 - 6t - 4 \\ 4t \end{pmatrix}$$

b)

for at bestemme længden skal jeg bare indsætte 3 ind på t's plads og bruge længden af en vektor sætning

$$|s'(3)| = \sqrt{(3 \cdot 3^2 - 6 \cdot 3 - 4)^2 + (4 \cdot 3)^2} = \sqrt{(27 - 18 - 4)^2 + (12)^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$$

## Opgave 3

Opgave 3 En funktion  $f$  er givet ved

$$f(x) = (2x - 6) \cdot \sqrt{x}.$$

a) Løs ligningen  $f(x) = 0$ .

a)

jeg sætter funktionen lig nul

$$(2x - 6) \cdot \sqrt{x} = 0$$

jeg bruger nulreglen

$$\sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$2x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 3$$

## Opgave 4

**Opgave 4** En funktion  $f$  er givet ved

$$f(x) = e^x + \cos(x).$$

**a)** Bestem en forskrift for den stamfunktion til  $f$ , hvis graf går gennem punktet  $(0,5)$ .

a)  
jeg integrerer funktionen

$$\int e^x + \cos(x) dx = e^x + \sin(x) + c$$

jeg sætter punktet ind i stamfunktionen

$$5 = e^0 + \sin(0) + c \Leftrightarrow 5 = 1 + 0 + c \Leftrightarrow 4 = c$$

stamfunktionen ser dermed:  $F(x) = e^x + \sin(x) + 4$

## Opgave 5

**Opgave 5** På en fabrik producerer maskinerne  $M_1$  og  $M_2$  halogen-pærer.

60 % af pærene bliver produceret af maskine  $M_1$ ,  
og resten bliver produceret af maskine  $M_2$ .

7 % af pærene fra maskine  $M_1$  er defekte,  
og 5 % af pærene fra maskine  $M_2$  er defekte.

a) Hvad er sandsynligheden for, at en tilfældigt udvalgt pære fra produktionen er defekt?

a)  
for at finde sandsynligheden skal jeg finde sandsynligheden for begge

$$M_1 : 0.6 \cdot 0.07 = 0.042$$

$$M_2 : 0.4 \cdot 0.05 = 0.02$$

den totale sandsynlighed er dermed

$$0.042 + 0.02 = 0.062$$

Sandsynligheden for at en tilfældigt udvalgt pære er defekt er 6,2%

## Opgave 6

**Opgave 6** En funktion  $f$  er løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6x^2 + 2y}{x}.$$

- a) Bestem en ligning for tangenten til grafen for  $f$  i punktet  $P(2,4)$ .  
b) Undersøg, om funktionen  $g(x) = 6x^2 \cdot \ln(x)$  er en løsning til differentialligningen.

a)

for at bestemme ligningen for tangenten til grafen vil jeg starte med at finde hældningen ved at sætte punktet ind i differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6 \cdot 2^2 + 2 \cdot 4}{2} = \frac{24 + 8}{2} = \frac{32}{2} = 16$$

Nu sætter jeg denne a-værdi ind i:  $b = y - a \cdot x$

$$b = 4 - 16 \cdot 2 = -28$$

dermed kan jeg opstille ligningen for tangenten

$$y = 16x - 28$$

b)

for at teste om  $g(x)$  er en løsning vil jeg starte med at finde den afledte af  $g$  og derefter indsætte den afledte lig med differentialligningen. Jeg vil også indsætte  $g(x)$  ind på  $y$ 's plads

$$g'(x) = 12x \cdot \ln(x) + 6x$$

$$12x \cdot \ln(x) + 6x = \frac{6x^2 + 2 \cdot (6x^2 \cdot \ln(x))}{x}$$

$$12x \cdot \ln(x) + 6x = 6x + 12x \cdot \ln(x)$$

da begge sider er ens er  $g(x)$  en løsning til differentialligningen

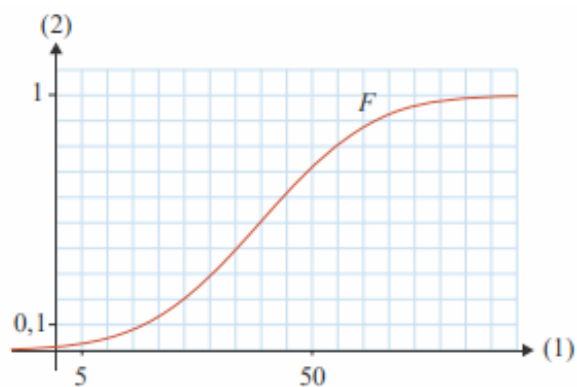
## Opgave 7

**Opgave 7** Figuren viser grafen for fordelingsfunktionen  $F$  for en normalfordelt stokastisk variabel  $X$ .

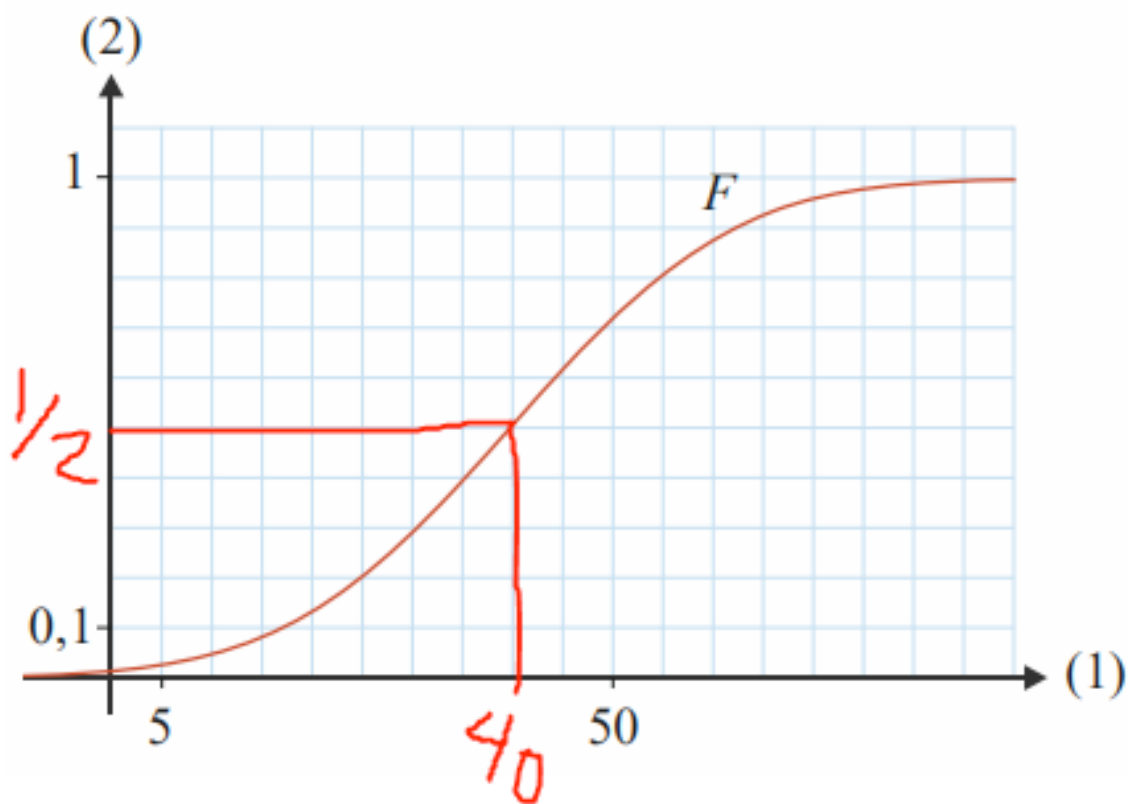
a) Gør for hver af følgende påstande rede for, om den er korrekt. Brug bilaget.

Bilag vedlagt

1. Middelværdien for  $X$  er lig 40.
2. Spredningen for  $X$  er lig 15.



a)  
jeg tegner på bilaget:



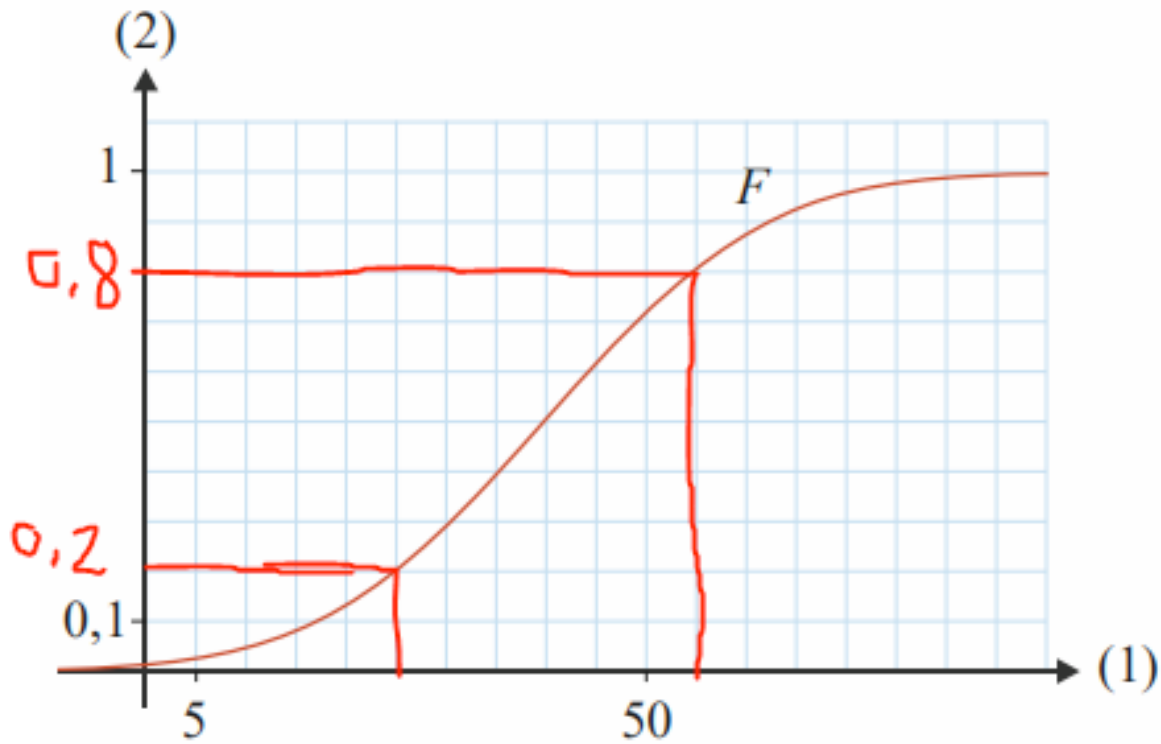
For at tjekke spredningen, vi ved at  $F(\mu - \sigma) = 16\%$  og  $F(\mu + \sigma) = 84\%$

$$F(\mu - \sigma) = 40 - 15 = 25$$

$$F(\mu + \sigma) = 40 + 15 = 55$$

jeg tjekker  $x = 25$  (5 tern henne på x-aksen).

jeg tjekker  $x = 55$  (11 tern henne på x-aksen).



begge er korrekte

## Opgave 8

Opgave 8 a) Bestem

$$\int (x^2 + 3x)^3 \cdot (2x + 3) dx .$$

a)  
jeg integrere med substitution

$$\int (x^2 + 3x)^3 \cdot (2x + 3) dx$$

$$\text{lad } u = x^2 + 3x \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x + 3 \Leftrightarrow \frac{1}{2x + 3} du = dx$$

$$\int (u)^3 \cdot (2x + 3) \frac{1}{2x + 3} du = \int (u)^3 du = \frac{u^4}{4} + c = \frac{(x^2 + 3x)^4}{4} + c$$

## Opgave 9

**Opgave 9** Figuren viser grafen for funktionen  $f$  givet ved

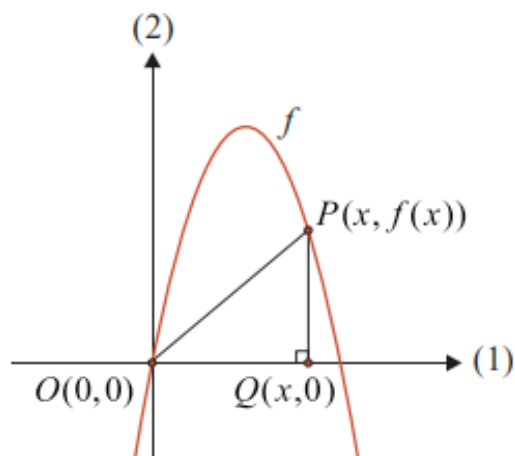
$$f(x) = -2x^2 + 12x.$$

Punkterne  $O(0,0)$ ,  $P(x, f(x))$  og  $Q(x,0)$ , hvor  $0 < x < 6$ , udgør hjørnerne i en trekant.

a) Gør rede for, at arealet  $T(x)$  af trekant  $OPQ$  er givet ved

$$T(x) = -x^3 + 6x^2.$$

b) Bestem den værdi af  $x$ , hvor trekantens areal er størst.



a)

For at redegøre at arealet  $T(x)$  er givet ved  $T(x) = -x^3 + 6x^2$

kan jeg starte med at definere arealet af en trekant:  $T = \frac{1}{2} \cdot h \cdot g$

grundlinjen er  $x$ , og højden svarer til  $f(x)$

$$T(x) = \frac{1}{2} \cdot x \cdot f(x) = \frac{1}{2} \cdot x \cdot (-2x^2 + 12x) = -x^3 + 6x^2$$

Hermed er det vist

b)

Jeg tager den afledte af  $T$

$$T'(x) = -3x^2 + 12x$$

sætter lig nul

$$-3x^2 + 12x = 0 \Leftrightarrow -3x(x - 4) = 0$$

jeg bruger nulreglen

$$x = 0 \vee x = 4$$

intervallet siger  $0 < x < 6$

er det kun  $x = 4$

Trekantens areal er altså størst, når  $x = 4$

Del 2: med hjælpemidler

## Opgave 10

restart, with (Gym) :

**Opgave 10** En vektorfunktion  $\vec{s}$  er givet ved

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} t^2 + 4t + 3 \\ 3 \cdot \sqrt{t^2 + t + 7} - 6 \end{pmatrix}, \quad -5 \leq t \leq 1.$$

**a)** Tegn banekurven for  $\vec{s}$ .

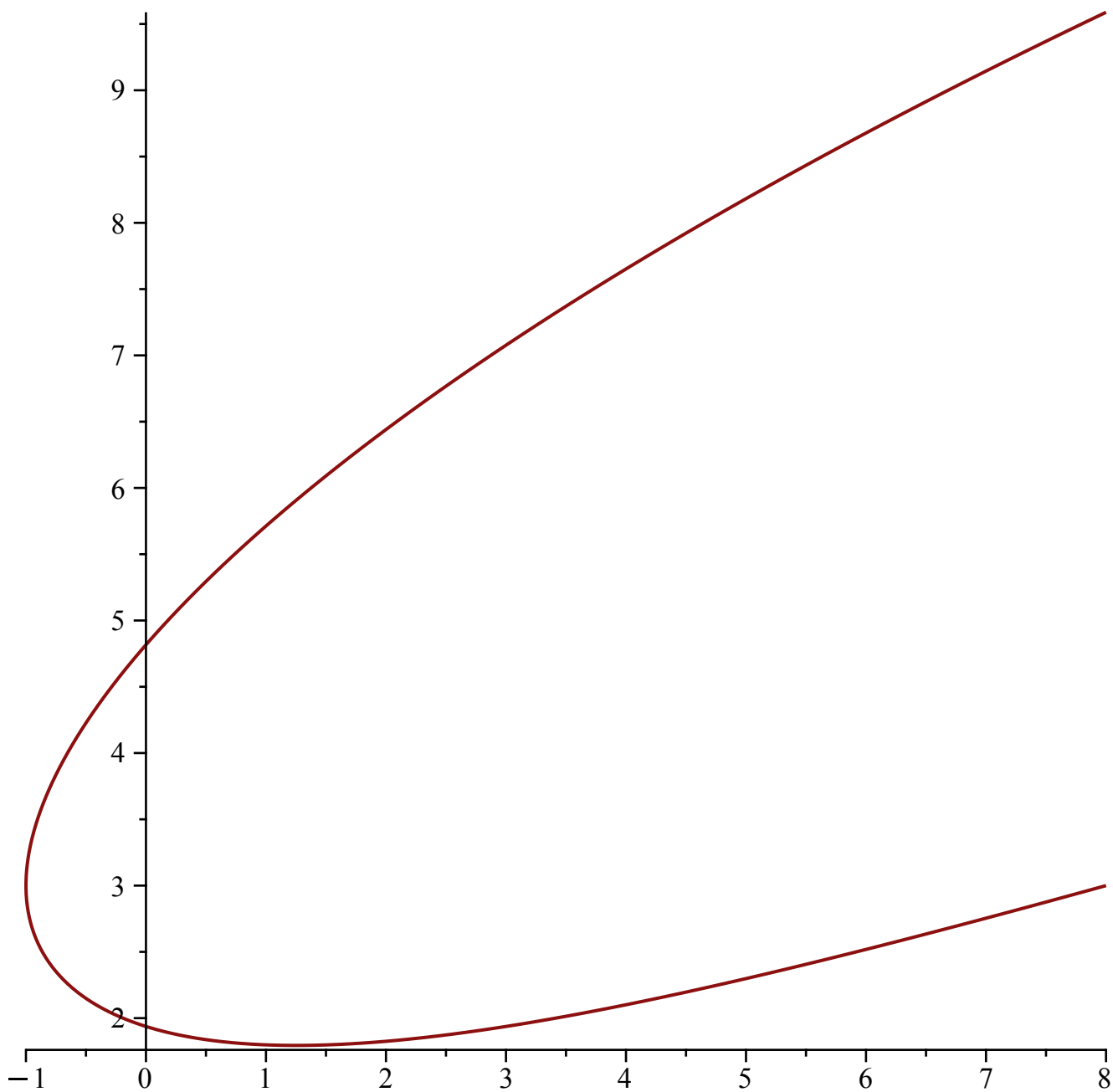
**b)** Bestem  $t$ -værdien hørende til det punkt på banekurven, hvor tangenten er vandret.

$$s(t) := \langle t^2 + 4 \cdot t + 3, 3 \cdot \sqrt{t^2 + t + 7} - 6 \rangle :$$

a)

jeg bruger vektorPlot til at tegne kurven

$$\text{vektorPlot}(s(t), t = -5 .. 1)$$



b)

Når tangenten skal være vandret skal  $y'(t) = 0$

$$y(t) := 3 \cdot \sqrt{t^2 + t + 7} - 6 :$$

$$x(t) := t^2 + 4 \cdot t + 3 :$$

$$y'(t) = 0 \xrightarrow{\text{solve for t}} \left[ \left[ t = -\frac{1}{2} \right] \right]$$

$$x' \left( -\frac{1}{2} \right) = 3$$

da den afledte af  $x$  med punktet  $t$  indsat bekræfter, at hastighedsvektoren i punktet ikke er nulvektoren

Den  $t$ -værdi, hvor tangenten til banekurven er vandret, er  $t = -\frac{1}{2}$

## Opgave 11

*restart, with(Gym) :*

**Opgave 11** Tabellen viser målingen af det systoliske blodtryk for 210 tilfældigt udvalgte yngre kvinder.

Systolisk blodtryk (mmHg)	125	120	...	122	108
---------------------------	-----	-----	-----	-----	-----

*Alle tabellens 210 måleresultater findes i bilaget "Blodtryk.xlsx"*

- a) Gør rede for, at måleresultaterne for det systoliske blodtryk med god tilnærmelse kan beskrives ved en normalfordelt stokastisk variabel  $X$ .

Blodtrykket er forhøjet, hvis det systoliske blodtryk er over 140 mmHg.

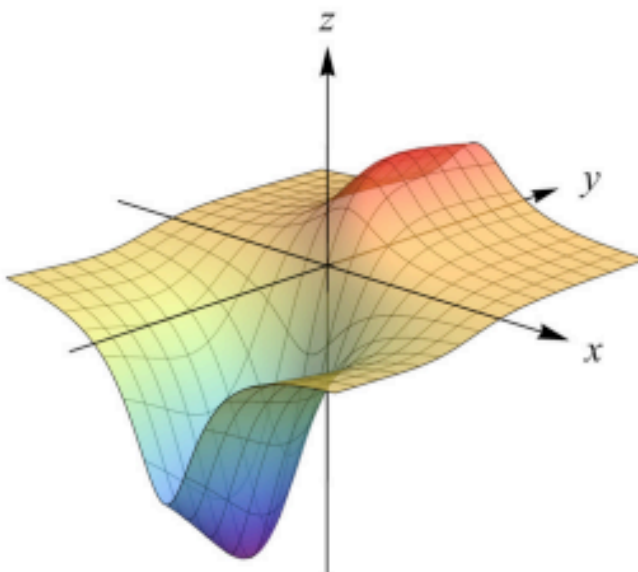
- b) Bestem sandsynligheden  $P(X > 140)$ , og giv en fortolkning af dette tal.

Havde ikke filen blodtryk.xlsx tilgængelig :(

## Opgave 12

*restart, with(Gym) :*

## Opgave 12



Figuren viser grafen for funktionen  $f$  af to variable givet ved

$$f(x, y) = \frac{10y}{(x^2 + 1) \cdot (y^2 + 2y + 4)}.$$

Funktionen  $f$  har to stationære punkter,  $P$  og  $Q$ .

- Bestem koordinatsættet til hvert af de to stationære punkter.
- Bestem længden af snitkurven fra  $P$  til  $Q$ .

$$f(x, y) := \frac{10 \cdot y}{(x^2 + 1) \cdot (y^2 + 2 \cdot y + 4)} :$$

a)

For at finde det stationære punkt løser jeg

$$\text{solve}\left(\left\{\frac{\partial}{\partial x}(f(x, y)) = 0, \frac{\partial}{\partial y}(f(x, y)) = 0\right\}\right)$$
$$\{x = 0, y = 2\}, \{x = 0, y = -2\}$$

(3.12.1)

jeg indsætter punkterne i funktionen for at finde z-værdien

$$f(0, 2) = \frac{5}{3}$$

$$f(0, -2) = -5$$

dermed er punkterne fundet  $\left(0, 2, \frac{5}{3}\right)$  og  $(0, -2, -5)$

b)

Snitkurven mellem dem vil derfor være den kurve, der fremkommer, når overfladen skæres af planet  $x = 0$

$$f(0, y) = \frac{10y}{y^2 + 2y + 4}$$

$$f(y) := \frac{10 \cdot y}{y^2 + 2 \cdot y + 4} :$$

jeg indsætter det ind i formlen for kurvelængden:  $L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$

$$\text{evalf}\left(\int_{-2}^2 \sqrt{1 + (f'(y))^2} dy\right)$$

8.336094099

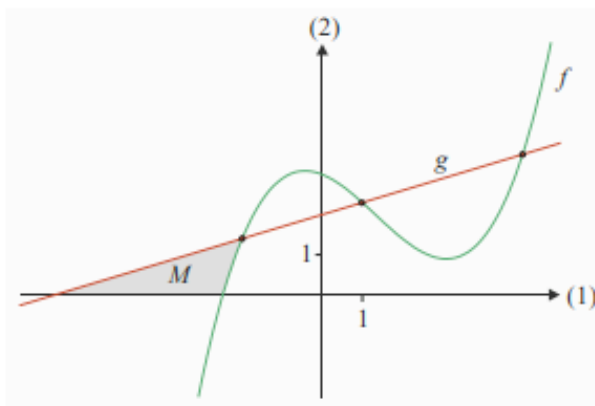
(3.12.2)

dermed er længden af snit kurven fundet

## Opgave 13

restart, with(Gym) :

### Opgave 13



Funktionerne  $f$  og  $g$  er givet ved

$$f(x) = \frac{1}{10} \cdot (x^3 - 4x^2 - 4x + 30)$$

$$g(x) = \frac{3}{10}x + 2$$

- a)** Bestem koordinatsættet til hvert af skæringspunkterne mellem grafen for  $f$  og grafen for  $g$ .

Graferne for  $f$  og  $g$  afgrænser sammen med førsteaksen et område  $M$  i 2. kvadrant. Se figuren.

- b)** Bestem arealet af  $M$ .

$$f(x) := \frac{1}{10} \cdot (x^3 - 4 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 30) :$$

$$g(x) := \frac{3}{10} \cdot x + 2 :$$

a)

jeg sætter funktionerne lig med hinanden

$$f(x) = g(x) \xrightarrow{\text{solve for } x} [[x = 5], [x = 1], [x = -2]]$$

Nu indsætter jeg disse x-værdi ind i en af funktionerne for at finde den tilsvarende y-værdi

$$f(5) = \frac{7}{2}$$

$$f(1) = \frac{23}{10}$$

$$f(-2) = \frac{7}{5}$$

punkterne er dermed:  $\left(5, \frac{7}{2}\right)$  og  $\left(1, \frac{23}{10}\right)$  og  $\left(-2, \frac{7}{5}\right)$

b)

For at bestemme arealet af M skal jeg først finde ud af hvor g skærer x-aksen og hvor f skærer x-aksen

$$g(x) = 0 \xrightarrow{\text{solve for } x} \left[ \left[ x = -\frac{20}{3} \right] \right]$$

$$f(x) = 0 \xrightarrow{\text{solve for } x}$$

$$\left[ \left[ x = -\frac{(269 + 3\sqrt{5601})^{1/3}}{3} - \frac{28}{3(269 + 3\sqrt{5601})^{1/3}} + \frac{4}{3} \right], \left[ x = \frac{(269 + 3\sqrt{5601})^{1/3}}{6} \right. \right.$$

$$\left. + \frac{14}{3(269 + 3\sqrt{5601})^{1/3}} + \frac{4}{3} \right.$$

$$\left. + \frac{1\sqrt{3} \left( -\frac{(269 + 3\sqrt{5601})^{1/3}}{3} + \frac{28}{3(269 + 3\sqrt{5601})^{1/3}} \right)}{2} \right], \left[ x \right.$$

$$\left. = \frac{(269 + 3\sqrt{5601})^{1/3}}{6} + \frac{14}{3(269 + 3\sqrt{5601})^{1/3}} + \frac{4}{3} \right]$$

$$-\frac{\sqrt{3} \left( -\frac{(269 + 3\sqrt{5601})^{1/3}}{3} + \frac{28}{3(269 + 3\sqrt{5601})^{1/3}} \right)}{2}$$

at 5 digits  $\rightarrow$   $[x = -2.4819], [x = 3.2409 - 1.2586 I], [x = 3.2409 + 1.2586 I]$

nu indsætter jeg de kendte værdier i et integral

$$\int_{-\frac{20}{3}}^{-2} g(x) dx - \int_{-2.4819}^{-2} f(x) dx = 2.909331536$$

dermed er arealet af M fundet til at være lig 2.909331536

## Opgave 14

*restart, with (Gym) :*

**Opgave 14** En butik har et alarmsystem til at opdage butikstyverier.

Lad  $T$  betegne hændelsen, at en kunde begår et tyveri.

Lad  $A$  betegne hændelsen, at alarmeren går i gang.

Sandsynligheden  $P(A|T)$  for, at alarmeren går i gang ved et tyveri, er 90 %.

Sandsynligheden  $P(A|\bar{T})$  for, at alarmeren går i gang ved en fejl, er 8 %.

Sandsynligheden  $P(T)$  for, at en kunde begår et tyveri, er 3 %.

- Bestem sandsynligheden for, at en kunde begår et tyveri, og at alarmeren går i gang.
- Bestem sandsynligheden for, at en kunde har begået et tyveri, givet at alarmeren er gået i gang.

a)

Jeg skal bestemme  $P(T \cap A)$

Jeg bruger formelen:  $P(T \cap A) = P(A|T) \cdot P(T)$

Jeg indsætter tallene da alle tallene er kendte

$$P(T \cap A) = 0.9 \cdot 0.03 = 0.027$$

b)

Jeg skal bestemme  $P(T|A)$

Jeg bruger Bayes' sætning:  $P(T|A) = \frac{P(T \cap A)}{P(A)}$

jeg finder dog først  $P(A)$   
 $P(\bar{T}) = 1 - 0.03 = 0.97$

$$P(A) = 0.9 \cdot 0.03 + 0.08 \cdot 0.97 = 0.1046$$

Nu indsætter jeg i Bayes' sætning

$$P(T|A) = \frac{0.027}{0.1046} = 0.2581261950$$

## Opgave 15

*restart, with(Gym) :*

**Opgave 15** I en model kan udviklingen i Thailands befolkningstal  $f(x)$  beskrives ved differentiaalligningen

$$y' = y \cdot (-0,000513 \cdot x + 0,0321) ,$$

hvor  $y = f(x)$  er befolkningstallet (målt i mio.)  $x$  år efter 1961.

Det oplyses, at befolkningstallet i Thailand i 1961 var 27,4 mio.

- Bestem befolkningstallet i 2030 ifølge modellen.
- Bestem, hvornår Thailands befolkningstal ifølge modellen var størst.

*Kilde: Macrotrends*

a)  
For at bestemme befolkningstallet i 2030 skal jeg løse differentiaalligningen

$$dsolve(\{y'(x) = y(x) \cdot (-0.000513 \cdot x + 0.0321), y(0) = 27.4\}, y(x))$$

$$y(x) = \frac{137 e^{-\frac{3x(171x-21400)}{2000000}}}{5} \quad (3.15.1)$$

Nu indsætter jeg differensen  $2030 - 1961 = 69$  ind på  $x$ 's plads

$$y(x) := \frac{137 e^{-\frac{3x(171x-21400)}{2000000}}}{5} :$$

$$y(69.) = 74.01342630$$

befolkningstallet i 2030 er lig med 74.01 millioner

b)

$$\text{solve}(y(x) \cdot (-0.000513 \cdot x + 0.0321) = 0, x);$$

$$62.57309942$$

(3.15.2)

$$\text{maximize}(y(x), x, \text{location} = \text{true});$$

$$74.80174840, \{ [x = 62.57309942], 74.80174840 \}$$

(3.15.3)

$x$  angiver antal år efter 1961. For at finde det tilsvarende årstal, lægger vi  $x$  til 1961:

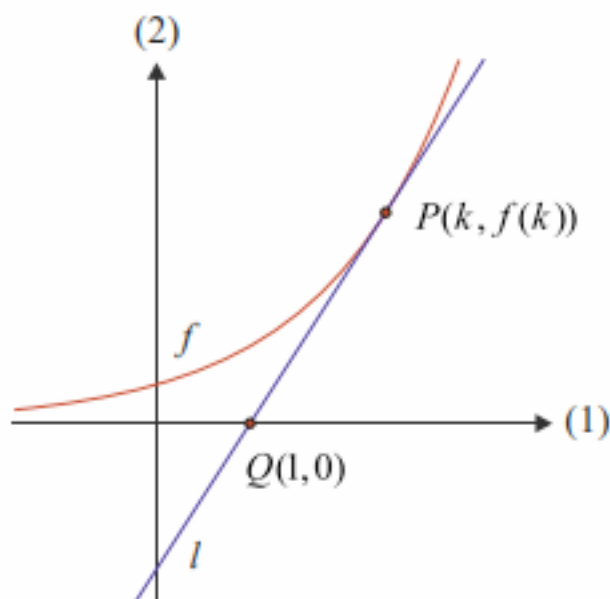
$$1961 + 62.57309942 = 2023.573099$$

Ifølge modellen var Thailands befolkningstal størst i løbet af år 2023.

## Opgave 16

*restart; with (Gym) :*

### Opgave 16



En funktion  $f$  er givet ved

$$f(x) = 2^x.$$

Et punkt  $P$  har koordinatsættet  $P(k, f(k))$ , hvor  $k$  er et tal.

Linjen  $l$  er tangent til grafen for  $f$  i punktet  $P$ .

a) Bestem tallet  $k$ , så linjen  $l$  går gennem punktet  $Q(1,0)$ .

$$f(x) := 2^x :$$

a)

Jeg kan starte med at finde punktet  $y$

$$f(k) = 2^k$$

Punktet er dermed

$$(k, 2^k)$$

nu kan jeg indsætte punktet i:  $b = y - a \cdot x$

$$b = 2^k - 2^k \cdot \ln(2) \cdot k = 2^k - 2^k \ln(2) k$$

Nu kan jeg indsætte b-værdien i:  $y = a \cdot x + b$

a finder jeg ved at tage den afledte af  $f$  når  $k$  er på  $x$ 's plads

$$f'(k) = 2^k \ln(2)$$

$$y(x) := 2^k \cdot \ln(2) \cdot x + 2^k - 2^k \ln(2) k$$

$$y := x \mapsto 2^k \cdot \ln(2) \cdot x + 2^k - 2^k \cdot \ln(2) \cdot k \quad (3.16.1)$$

Nu sætter jeg  $Q$  punktet ind og løser for  $k$

$$\text{solve}(y(1) = 0, k)$$

$$\frac{\ln(2) + 1}{\ln(2)} \quad (3.16.2)$$

at 5 digits  
→

$$2.4428 \quad (3.16.3)$$

*restart, with(Gym) :*

## stx253\_MAT\_A\_03122025

Del 1: uden hjælpemidler

### Opgave 1

**Opgave 1** En funktion  $f$  af to variable er givet ved

$$f(x, y) = 5x^2 - y^2 + 3x \cdot y.$$

a) Bestem  $f(2, -1)$ .

b) Bestem  $f'_x(x, y)$ .

a)

jeg indsætter værdierne på deres pladser i funktionen

$$f(2, -1) = 5 \cdot 2^2 - (-1)^2 + 3 \cdot 2 \cdot (-1) = 20 - 1 - 6 = 13$$

b)

jeg partialdifferentiere funktionen med respekt til  $x$

$$\frac{\partial}{\partial x} (5x^2 - y^2 + 3 \cdot x \cdot y) = 10x + 3 \cdot y$$

## Opgave 2

**Opgave 2** En funktion  $f$  er løsning til differentiaalligningen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{3x} + x^2.$$

Grafen for  $f$  går gennem punktet  $P(2, 18)$ .

a) Bestem linjeelementet i punktet  $P$ .

a)

jeg bruger definitionen af linjeelement:  $(x_0, y_0, y'_0)$

Jeg indsætter punktet i differentiaalligningen for at finde den sidste koordinat

$$\frac{dy}{dx} = \frac{18}{3 \cdot 2} + 2^2 = \frac{18}{6} + 4 = 3 + 4 = 7$$

dermed er linjeelementet:  $(2, 18, 7)$

## Opgave 3

**Opgave 3** For en normalfordelt stokastisk variabel  $X$  er intervallet for de normale udfald  $[34; 50]$ .

a) Gør rede for, at middelværdien  $\mu$  er 42, og at spredningen  $\sigma$  er 4.

a)

Jeg kan tjekke ved at se om de passer i normal udfaldet

$$[\mu - 2 \cdot \sigma, \mu + 2 \cdot \sigma]$$

Jeg skal ende ud med det normale udfald  $[34; 50]$  når jeg sætter middel værdi og spredning ind

$$[42 - 2 \cdot 4, 42 + 2 \cdot 4] = [34, 50]$$

altså middelværdien og spredningen passer med det normale udfald

## Opgave 4

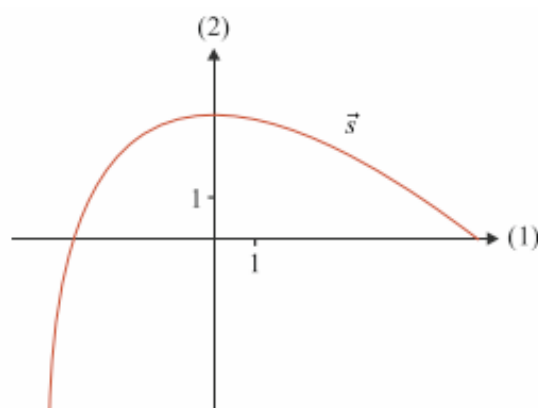
**Opgave 4** På figuren ses banekurven for vektorfunktionen  $\vec{s}$  givet ved

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} t^2 + 4t \\ -2t^2 + 3 \end{pmatrix}.$$

a) Bestem  $\vec{s}'(t)$ .

En vektor  $\vec{a}$  har koordinatsættet  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

b) For hvilken  $t$ -værdi er tangenten til banekurven og vektor  $\vec{a}$  ortogonale?



a)  
jeg bestemmer den afledte af vektorfunktionen

$$s'(t) = \begin{pmatrix} 2 \cdot t + 4 \\ -4 \cdot t \end{pmatrix}$$

b)  
Da vektorerne skal være ortogonale skal skalarproduktet af de 2 vektorer være lig 0

$$s'(t) \cdot a = (2 \cdot t + 4) \cdot 1 + (-4 \cdot t) \cdot 2 = 2 \cdot t + 4 - 8 \cdot t = -6 \cdot t + 4 = 0$$

nu skal jeg løse denne simple ligning

$$-6 \cdot t + 4 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{4}{6} = t = \frac{2}{3}$$

## Opgave 5

**Opgave 5** En funktion  $f$  er givet ved

$$f(x) = e^x \cdot (x^2 - 2x - 8).$$

a) Løs ligningen  $f(x) = 0$ .

b) Bestem  $f'(x)$ .

Bestem  $f'(0)$ .

a)

jeg sætter funktionen lig nul

$$e^x \cdot (x^2 - 2 \cdot x - 8) = 0$$

jeg bruger nul reglen

$$e^x = 0 \Leftrightarrow \emptyset$$

$$x^2 - 2 \cdot x - 8 = 0 \Leftrightarrow (x + 2) \cdot (x - 4) = 0$$

altså  $x = -2 \vee x = 4$

b)

jeg bestemmer den afledte af funktionen

$$f'(x) = e^x \cdot (x^2 - 2x - 8) + e^x \cdot (2x - 2) = e^x \cdot (x^2 - 10)$$

jeg indsætter nu nul på x's plads

$$f'(0) = e^0 \cdot (0^2 - 10) = 1 \cdot (-10) = -10$$

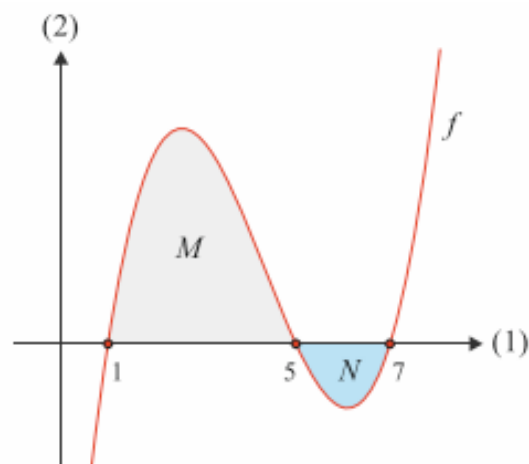
## Opgave 6

**Opgave 6** På figuren ses grafen for en funktion  $f$ .

Grafen for  $f$  afgrænser sammen med førsteaksen to områder  $M$  og  $N$ .

Arealet af  $M$  er 32, og arealet af  $N$  er 5.

a) Bestem  $\int_1^5 f(x) dx$  og  $\int_1^7 f(x) dx$ .



a)

Området  $M$  kan man spotte er integralet af  $f(x)$  i intervallet 1 til 5 og arealet  $N$  er integral af  $f(x)$  fra 5 til 7

så

$$\int_1^5 f(x) dx = M = 32$$

dermed må integralet

$$\int_1^7 f(x) dx = \int_1^5 f(x) dx - \int_5^7 f(x) dx = 32 - 5 = 27$$

Den anden integrale bliver trukket fra da den er under x-aksen

## Opgave 7

**Opgave 7** I et sandsynlighedsfelt  $(U, P)$  er givet to hændelser  $A$  og  $B$ .

Det oplyses, at  $P(A) = 0,47$ ,  $P(A \cup B) = 0,59$  og  $P(A \cap B) = 0,08$ .

a) Bestem  $P(B)$  og  $P(A|B)$ .

a)  
for at finde  $P(B)$  kan jeg bruge formlen  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$   
 $0.59 = 0.47 + P(B) - 0.08$   
 $0.20 = P(B)$

for at bestemme  $P(A|B)$  jeg kan bruge:  $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

$$P(A|B) = \frac{0.08}{0.2} = 0.4$$

## Opgave 8

**Opgave 8** a) Bestem integralet

$$\int 8x^3 \cdot (x^4 + 1)^2 dx.$$

a)  
jeg bruger u substitution

$$\int 8x^3 \cdot (x^4 + 1)^2 dx$$

$$\text{lad } u = x^4 + 1 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 4x^3 \Leftrightarrow \frac{1}{4x^3} du = dx$$

$$\int 8x^3(u)^2 \frac{du}{4x^3} = \int 2u^2 du = \frac{2}{3}u^3 + c = \frac{2}{3}(x^4 + 1)^3 + c$$

## Opgave 9

## Opgave 9



Billedkilde: Wikipedia

I en model kan længdeudviklingen af en fisk i en sø beskrives ved en funktion  $L$ , hvor  $L(t)$  betegner fiskens længde (målt i cm), og  $t$  er fiskens alder (målt i år).

I modellen er væksthastigheden for fiskens længde proportional med forskellen mellem fiskens maksimale længde og fiskens længde til alderen  $t$ .

Det oplyses, at proportionalitetsfaktoren er  $k = 0,15$ , og at fiskens maksimale længde er 90 cm.

a) Opstil en differentiaalligning, som  $L$  opfylder.

a)

Væksthastigheden for fiskens længde er den afledede  $L'(t)$

Ifølge modellen er væksthastigheden proportional med forskellen mellem den maksimale længde (90 cm)

og længden til tiden  $t$  dvs.  $90 - L(t)$

Proportionalitetsfaktoren er  $k = 0.15$

Dermed opstilles differentiaalligningen:

$$L'(t) = 0.15 \cdot (90 - L(t))$$

Del 2: med hjælpemidler

## Opgave 10

restart; with (Gym) :

**Opgave 10** En vektorfunktion  $\vec{s}$  er givet ved

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} t^3 - 5t^2 + 4t \\ \frac{1}{3}t^3 - t^2 + 1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestem koordinatsættet til det punkt  $P$  på banekurven for  $\vec{s}$ , hvor  $t = 3$ .

b) Bestem  $t$ -værdien til hvert af de punkter, hvor banekurven skærer andenaksen.

$$s(t) := \left\langle t^3 - 5 \cdot t^2 + 4 \cdot t, \frac{1}{3} \cdot t^3 - t^2 + 1 \right\rangle :$$

a)

Jeg indsætter 3 på t's plads

$$s(3) = \begin{bmatrix} -6 \\ 1 \end{bmatrix}$$

dermed er punktet P fundet  $(-6, 1)$

b)

Jeg sætter  $x(t) = 0$

$$t^3 - 5 \cdot t^2 + 4 \cdot t = 0 \xrightarrow{\text{solve } t^3 - 5 \cdot t^2 + 4 \cdot t = 0}$$

$$[[t = 0], [t = 4], [t = 1]]$$

(4.10.1)

t-værdierne til de punkter, hvor banekurven skærer andenaksen, er  $[[t = 0], [t = 4], [t = 1]]$

## Opgave 11

restart; with(Gym) :

**Opgave 11** En normalfordelt stokastisk variabel  $X$  har middelværdi  $\mu = 5$  og spredning  $\sigma = 0,8$ .

a) Bestem  $P(6 \leq X \leq 8)$ .

b) Bestem tallet  $k$ , så  $P(X \leq k) = 0,3$ .

a)

For at bestemme sandsynligheden integrere jeg tæthedsfunktion

$$\int_{-\infty}^8 \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi} \cdot 0.8} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-5}{0.8}\right)^2} dx - \int_{-\infty}^6 \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi} \cdot 0.8} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-5}{0.8}\right)^2} dx = 0.1055613564$$

Dermed er sandsynligheden bestemt til at være 10.55%

b)

For at bestemme  $k$  integrere jeg tæthedsfunktion hvor øvre grænse er  $k$

$$\text{reelSolve}\left(\int_{-\infty}^k \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi} \cdot 0.8} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-5}{0.8}\right)^2} dx = 0.3, k\right)$$

4.580479589

(4.11.1)

dermed er  $k$  fundet til at være 4.580479589

## Opgave 12

restart; with(Gym) :

## Opgave 12



Billedkilde: bt

I en model kan indbyggertallet i København beskrives ved

$$f(x) = \frac{817215}{1 + 0,613 \cdot 0,942^x}, \quad 0 \leq x \leq 17,$$

hvor  $f(x)$  er indbyggertallet  $x$  år efter 2008.

- a) Bestem det tidspunkt, hvor indbyggertallet vokser med en hastighed på 8000 indbyggere om året.

$$f(x) := \frac{817215}{1 + 0.613 \cdot 0.942^x} :$$

a)

For at bestemme det tidspunkt hvor indbyggertallet vokser med 8000 indbyggere om året skal jeg sætte den afledte af  $f$  lig med 8000

$$f'(x) = 8000 \xrightarrow{\text{solve for } x} [[x = 14.34249085], [x = -30.72375636]]$$

$x = 14.34249085$  ligger inde for intervallet

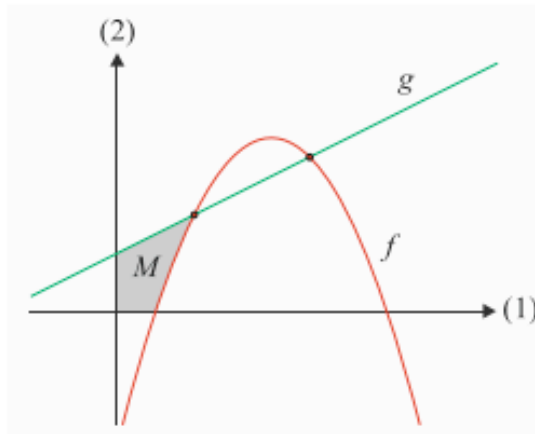
$$2008 + 14.34249085 = 2022.342491$$

i år 2022 vokser indbyggertallet med 8000 om året

## Opgave 13

restart, with (Gym) :

### Opgave 13



To funktioner  $f$  og  $g$  er givet ved

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 4x - 7$$

$$g(x) = \frac{1}{2}x + 3$$

a) Bestem koordinatsættet til hvert af skæringspunkterne mellem graferne for  $f$  og  $g$ .

Graferne for  $f$  og  $g$  afgrænser sammen med koordinatsystemets akser et område  $M$ .  
Se figuren.

b) Bestem omkredsen af området  $M$ .

$$f(x) := -\frac{1}{4} \cdot x^2 + 4 \cdot x - 7 :$$

$$g(x) := \frac{1}{2} \cdot x + 3 :$$

a)

for at bestemme skæringspunkterne mellem funktionerne sætter jeg dem lig hinanden

$$f(x) = g(x) \xrightarrow{\text{solve for } x} [[x = 4], [x = 10]]$$

disse to  $x$ -værdier sætter jeg nu ind i en af funktionerne for at finde deres tilsvarende  $y$ -værdi

$$f(4) = 5$$

$$f(10) = 8$$

Skæringspunkterne er dermed fundet til at være:  $(4, 5)$  og  $(10, 8)$

b)

For at bestemme omkredsen af  $M$  skal jeg tage kurvelængden af funktionerne mellem nogle skæringer

Jeg finder skæringen af f mellem x-aksen

$$f(x) = 0 \xrightarrow{\text{solve for } x} [[x = 2], [x = 14]]$$

skæringen med y-aksen og g er bare 3

$$\text{kurvenlængde er defineret: } L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} \, dx$$

$$O_M = 2 + \int_2^4 \sqrt{1 + f'(x)^2} \, dx + \int_0^4 \sqrt{1 + g'(x)^2} \, dx + 3 = 5 + 3\sqrt{5}\sqrt{2} + \operatorname{arcsinh}(3) - \operatorname{arcsinh}(2)$$

$\xrightarrow{\text{at 5 digits}}$

14.861

(4.13.1)

omkredsen er dermed fundet

## Opgave 14

*restart, with (Gym) :*

## Opgave 14



Billedkilde: nyheder24

Et reservoir benyttes til opsamling af vand ved skybrud.

I en model kan vandstanden i reservoiret ved et bestemt skybrud beskrives ved differentialligningen

$$\frac{dh}{dt} = -0,10 \cdot h - 0,012 \cdot t^2 + 0,60 \cdot t + 0,10, \quad 0 \leq t \leq 50,$$

hvor  $h(t)$  er vandstanden (målt i cm) til tiden  $t$  (målt i antal minutter efter skybruddets start).

Det oplyses, at  $h(0) = 0$ .

- Med hvilken hastighed stiger vandstanden i reservoiret til tidspunktet  $t = 0$ ?
- Bestem de to tidspunkter, hvor vandstanden i reservoiret er 40 cm.
- Bestem den højeste vandstand i reservoiret ved skybruddet.

a)

For at finde hastigheden til tidspunktet hvor  $t$  er lig 0 indsætter jeg de værdier jeg kender i differential ligningen

$$\frac{dh}{dt} = -0,10 \cdot 0 - 0,012 \cdot 0^2 + 0,6 \cdot 0 + 0,1 = 0,1$$

til tidspunktet 0 vokser den altså med 0.1 cm per min

b)

Jeg finder funktionen vha. dsolve

$dsolve(\{h'(t) = -0,1 \cdot h(t) - 0,012 \cdot t^2 + 0,6 \cdot t + 0,1, h(0) = 0\}, h(t))$

$$h(t) = -\frac{3t^2}{25} + \frac{42t}{5} - 83 + 83e^{-\frac{t}{10}} \quad (4.14.1)$$

for at finde tidspunktet når vandstanden er lig 40cm sætter jeg den fundne funktion lig med 40

$$h(t) := -\frac{3t^2}{25} + \frac{42t}{5} - 83 + 83 \cdot e^{-\frac{t}{10}} :$$

$intervalsolve(h(t) = 40, t = 0..50) = [16.89931716, 49.31745832]$

altså når vandstanden er 40cm er tidspunktet 16.9 min og 49.31745832 min

c)  
for at bestemme den højeste vandstand vil jeg finde den afledte af h og sætte lig nul

$$h'(t) = 0 \xrightarrow{\text{solve for } t} \left[ \left[ t = 35 + 10 \operatorname{LambertW} \left( -\frac{83 e^{-\frac{7}{2}}}{24} \right) \right], \left[ t = 35 + 10 \operatorname{LambertW} \left( -1, -\frac{83 e^{-\frac{7}{2}}}{24} \right) \right] \right] \xrightarrow{\text{at 5 digits}} [[t = 33.826], [t = -0.168]]$$

$t = 33.826$  er inde for intervallet

jeg bestemmer maximum

$maximize(h(t), t = 0..50., location = true)$

$$66.65320775, \{ [t = 33.82552749], 66.65320775 \}$$

**(4.14.2)**

altså ved tidspunktet  $t = 33.826$  er det maksimum

Jeg indsætter nu denne t-værdi i h

$$h(33.826) = 66.65320774$$

den højeste vandstand er 66.65cm

## Opgave 15

*restart, with (Gym) :*

## Opgave 15



Billedkilde: pexels

I en bestemt forlystelsespark er 56 % af gæsterne voksne, og resten er børn. 4 % af de voksne gæster prøver en tur i parkens rutsjebane Tornadoen, mens 39 % af børnene prøver en tur i Tornadoen.

- Hvad er sandsynligheden for, at en tilfældigt udvalgt gæst prøver en tur i Tornadoen?
- Hvad er sandsynligheden for, at en tilfældigt udvalgt gæst, der prøver en tur i Tornadoen, er voksen?

a)

For at finde sandsynligheden at en tilfældig udvalgt gæst prøver en tur i tornadoen sætter jeg regnestykket op her:

$$0.56 \cdot 0.04 + (1 - 0.56) \cdot 0.39 = 0.1940$$

Sandsynligheden for at en tilfældig gæst prøver Tornadoen er 0.1940 (eller 19.4%).

b)

For at bestemme sandsynligheden at en tilfældig gæst er voksen og prøver tornadoen bruger jeg Bayes' sætning

$$P(V|T) = \frac{P(T|V) \cdot P(V)}{P(T)}$$

$$P(V|T) = \frac{0.04 \cdot 0.56}{0.1940} = 0.1154639175$$

Sandsynligheden for at en gæst, der prøver Tornadoen, er voksen, er ca. 0.1154639175 (eller 11.55%).

## Opgave 16

restart; with (Gym) :

**Opgave 16** En funktion  $f$  af to variable er givet ved

$$f(x, y) = x^2 + 2y^2 + 3x \cdot y + 4x + a \cdot y + b, \text{ hvor } a \text{ og } b \text{ er tal.}$$

Det oplyses, at punktet  $P(1, -2, 6)$  er et stationært punkt for funktionen  $f$ .

a) Bestem tallene  $a$  og  $b$ .

$$f(x, y) := x^2 + 2 \cdot y^2 + 3 \cdot x \cdot y + 4 \cdot x + a \cdot y + b :$$

a)

for at bestemme tallene  $a$  og  $b$ , vil jeg finde dem via det stationære punkt da jeg allerede kender punktet

$$\text{solve} \left( \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (f(x, y)) = 0, \frac{\partial}{\partial y} (f(x, y)) = 0 \right\} \right)$$

$$\left\{ a = 6 + \frac{y}{2}, x = -2 - \frac{3y}{2}, y = y \right\} \quad (4.16.1)$$

jeg kan her indsætte det stationære punkt for at finde  $a$

$$a = 6 + \frac{-2}{2} = 5$$

nu kan jeg finde  $b$  ved at indsætte alle de kendte værdier i selve funktionen

$$6 = 1^2 + 2 \cdot (-2)^2 + 3 \cdot 1 \cdot (-2) + 4 \cdot 1 + 5 \cdot (-2) + b \xrightarrow{\text{solve } 6 = -3 + b}$$

$$[[b = 9]] \quad (4.16.2)$$

Dermed er  $a$  og  $b$  fundet

$$a = 5$$

$$b = 9$$

*restart, with(Gym) :*

## 1stx241\_MAT\_A\_28052024

Del 1: uden hjælpemidler

### Opgave 1

**Opgave 1** a) Bestem  $\int (4x^3 + e^x) dx$ .

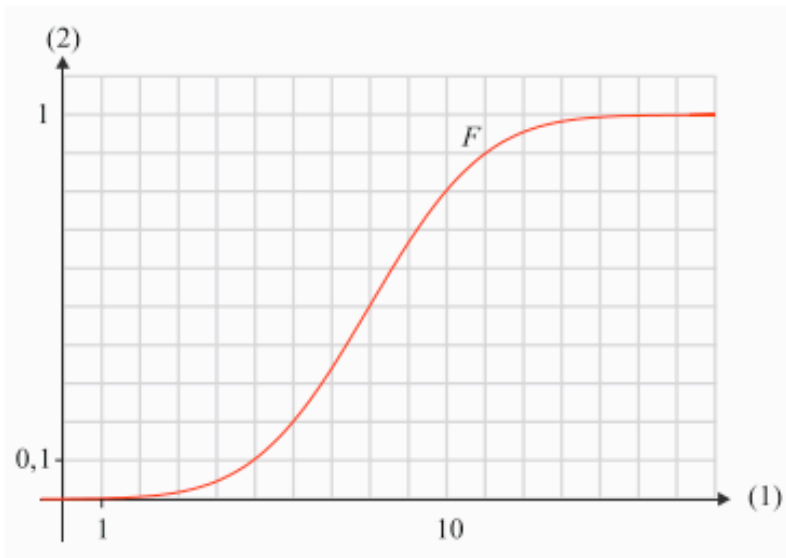
jeg bestemmer integralet

$$\int 4x^3 + e^x dx = x^4 + e^x + c$$

## Opgave 2

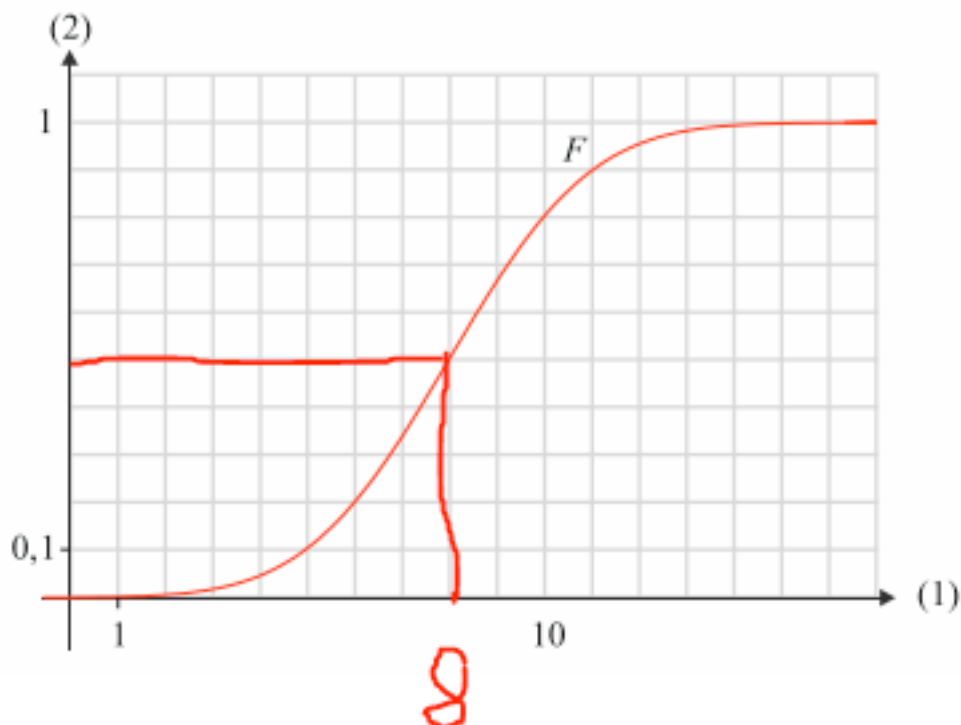
**Opgave 2** Figuren viser grafen for fordelingsfunktionen  $F$  hørende til en normalfordelt stokastisk variabel  $X$ .

Bilag vedlagt

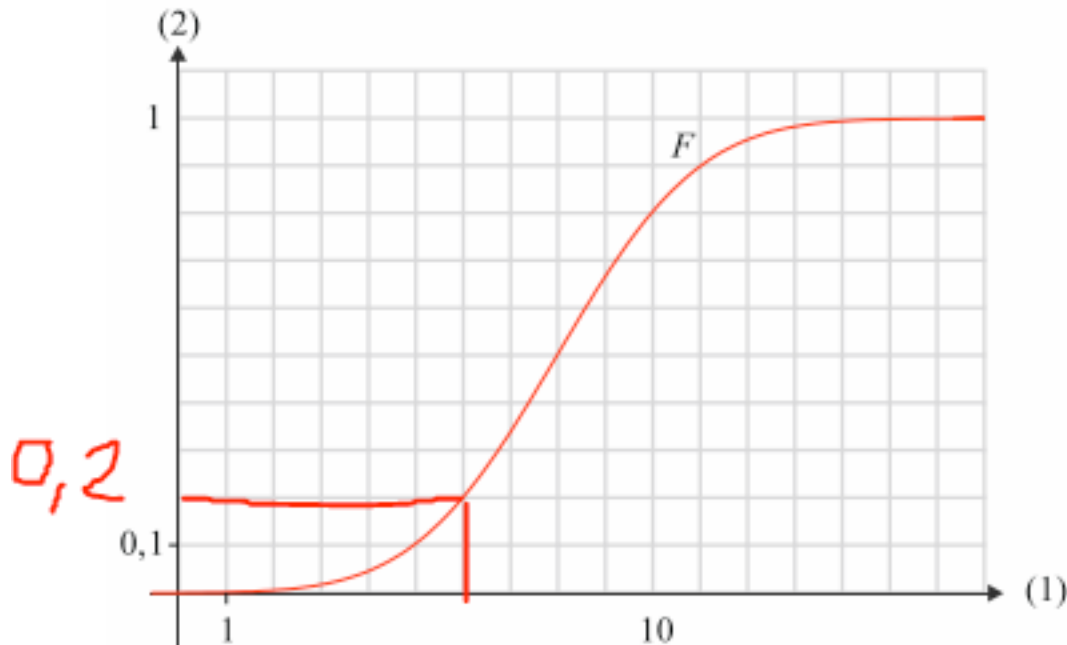


a) Bestem middelværdien  $\mu$  og sandsynligheden  $P(X \leq 6)$ . Brug bilaget.

a)  
jeg bruger bilaget



Middelværdien er 8, da grafen for fordelingsfunktion, har det princip at 0.5 på y-aksen svarer til middelværdien på dens x-akse



ud fra 6 på x-aksen ender jeg på 0.2 og da  $P(X \leq 6)$  er sandsynligheden lig med 20%

### Opgave 3

**Opgave 3** a) Løs ligningen

$$\ln(x) \cdot \left( \frac{1}{2}x - 10 \right) = 0.$$

a)  
jeg opstiller ligningen

$$\ln(x) \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot x - 10 \right) = 0$$

for at løse ligningen kan jeg bruge nulreglen. Jeg sætter derfor hver stykke lig nul

$$\ln(x) = 0 \Leftrightarrow x = e^0 \Rightarrow x = 1$$

$$\frac{1}{2} \cdot x - 10 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot x = 10 \Leftrightarrow x = 20$$

dermed har jeg fundet x når ligningen er lig nul

$$x = 1 \vee x = 20$$

## Opgave 4

**Opgave 4** En vektorfunktion  $\vec{s}$  er bestemt ved

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \cdot \cos(t) \\ 3 \cdot \sin(t) \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Parameterkurven for  $\vec{s}$  er en cirkel.

**a)** Bestem centrum og radius for cirklen.

**b)** Bestem  $\vec{s}(\pi)$ .

a)

for at bestemme centrum og radius vil jeg definere formlen først:

$$\text{Parameterfremstillingen for en cirkel har formen } \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r \cdot \cos(t) \\ r \cdot \sin(t) \end{pmatrix}$$

for  $C(a, b)$  er centrum og  $r$  er radius

nu kan jeg ud fra den definition kigge på  $\vec{s}$  og bestemme centrum og radius

Centrum er lig:  $C(-2, 5)$

radius er lig:  $r = 3$

b) bestem  $\vec{s}(\pi)$

for at bestemme det udtryk sætter jeg pi ind på t's plads

$$\vec{s}(\pi) = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \cdot \cos(\pi) \\ 3 \cdot \sin(\pi) \end{pmatrix}$$

jeg ved når cosinus tager en pi's rotation ender den ved -1 og så hvis sinus tager en pi's rotation ved den have en værdi på 0

$$\vec{s}(\pi) = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \cdot (-1) \\ 3 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

## Opgave 5

**Opgave 5** En funktion  $f$  er løsning til differentialligningen

$$y' = 0,05 \cdot y \cdot (100 - y).$$

Grafen for  $f$  går gennem punktet  $P(0,20)$ .

**a)** Bestem linjeelementet i  $P$ .

**b)** Bestem en forskrift for  $f$ .

a)

linjeelementet er defineret:  $(x_0, y_0, y'_0)$

det vil så betyde at for at finde den sidste koordinat skal jeg bare sætte  $P$  ind i dif ligningen

$$y' = 0,05 \cdot 20 \cdot (100 - 20) = 80$$

Dermed må linjeelementet være lig:  $(0, 20, 80)$

b)

for at bestemme en forskrift bruger jeg formlen (179)

$$y' = a \cdot y \cdot (M - y) \quad y = \frac{M}{1 + c \cdot e^{-a \cdot M \cdot x}}$$

Nu kan jeg bare sætte de matchende værdier ind i løsningen

$$y = \frac{100}{1 + c \cdot e^{-0,05 \cdot 100 \cdot x}}$$

For at finde konstanten  $c$  vil jeg sætte punktet  $P$  ind i funktionen

$$20 = \frac{100}{1 + c \cdot e^{-0,05 \cdot 100 \cdot 0}} \Leftrightarrow 20 = \frac{100}{1 + c \cdot e^0} \Leftrightarrow 20 = \frac{100}{1 + c} \Leftrightarrow (1 + c) \cdot 20 = 100 \Leftrightarrow 20 + 20 \cdot c = 100 \\ \Leftrightarrow 20 \cdot c = 80 \Leftrightarrow c = 4$$

dermed er forskriften bestemt

$$y = \frac{100}{1 + 4 \cdot e^{-5 \cdot x}}$$

**Opgave 6**

### Opgave 6

 En funktion  $f$  er givet ved

$$f(x) = e^{5x^3+9x}.$$

a) Bestem  $f'(x)$ .

a)

for at bestemme den afledte funktion bruger jeg formlerne: (136), (140), (143)

$$f'(x) = (e^{5x^3+9x})' = e^{5x^3+9x} \cdot (15x^2 + 9)$$

dermed er den afledte bestemt

### Opgave 7

**Opgave 7** Der foretages to kast med en sædvanlig terning.  
Hændelsen  $A$  er, at mindst et af de to kast er en 3'er.  
Hændelsen  $B$  er, at summen af øjentallene for de to kast er 6.

a) Bestem hver af sandsynlighederne  $P(B)$  og  $P(A|B)$ .



Billedkilde: lekolar

a)

Der er 5 gunstige udfald.

$$P(B) = \frac{5}{36}$$

Ud af de 5 udfald, der giver summen 6, er der kun 1 udfald (3, 3), hvor der er mindst en 3'er.

$$P(A|B) = \frac{1}{5}$$

### Opgave 8

**Opgave 8** Funktionerne  $f$  og  $g$  er bestemt ved

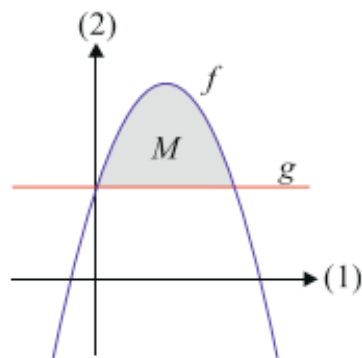
$$f(x) = -x^2 + 3x + 2$$

$$g(x) = 2.$$

- a) Bestem koordinatsættet til hvert af skæringspunkterne mellem grafen for  $f$  og grafen for  $g$ .

Mellem graferne for de to funktioner afgrænses et område  $M$ , der har et areal.

- b) Bestem arealet af området  $M$ .



a)

For at bestemme skæringspunkterne vil jeg sætte funktionerne lig med hinanden

$$-x^2 + 3 \cdot x + 2 = 2 \Leftrightarrow -x^2 + 3 \cdot x = 0 \Leftrightarrow x \cdot (-x + 3) = 0$$

jeg bruger nu nulreglen

$$x = 0 \vee -x + 3 = 0 \Leftrightarrow -x = -3 \Rightarrow x = 3$$

For at finde y-koordinaterne, sætter jeg x-værdierne ind i en af funktionerne. Da  $g(x) = 2$  er en konstant, vil y-koordinaten altid være 2.

punkterne er dermed:  $(0, 2)$  og  $(3, 2)$

b)

da jeg kender skæringspunkterne kan jeg bruge integrale regning til at finde  $M$

$$\begin{aligned} \int_0^3 -x^2 + 3 \cdot x + 2 \, dx - \int_0^3 2 \, dx &= \left[ -\frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 + 2x \right]_0^3 - [2x]_0^3 = \left[ -\frac{3^3}{3} + \frac{3}{2} \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 - \left( -\frac{0^3}{3} \right. \right. \\ &+ \left. \left. \frac{3}{2} \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 \right) \right] - [2 \cdot 3 - (2 \cdot 0)] = \left[ -9 + \frac{27}{2} + 6 \right] - [6] = \left[ -\frac{18}{2} + \frac{27}{2} + \frac{12}{2} \right] - [6] \\ &= \left[ \frac{-18 + 27 + 12}{2} \right] - [6] = \left[ \frac{21}{2} \right] - [6] = \frac{21}{2} - \frac{12}{2} = \frac{21 - 12}{2} = \frac{9}{2} \end{aligned}$$

dermed er arealet af området fundet til at være lig  $\frac{9}{2}$

## Opgave 9

**Opgave 9** En funktion  $f$  af to variable er givet ved

$$f(x, y) = a \cdot x^2 \cdot y - x^3 - b \cdot y,$$

hvor  $a$  og  $b$  er konstanter.

Det oplyses, at  $f$  har et stationært punkt  $P(2, 1, f(2, 1))$ .

a) Bestem konstanterne  $a$  og  $b$ .

a)

Det stationære punkt findes ved at tage den partielle afledte af  $f$  med respekt til  $x$  og en med  $y$  og dem sætter man lig 0

$$f'_x = 2 \cdot a \cdot x \cdot y - 3 \cdot x^2$$

$$f'_y = a \cdot x^2 - b$$

da den med respekt til  $y$  har begge konstanterne bruger jeg den med respekt til  $x$ , hvor jeg sætter punktet ind og sætter lig nul

$$0 = 2 \cdot a \cdot 2 \cdot 1 - 3 \cdot 2^2 \Leftrightarrow 0 = 4 \cdot a - 12 \Leftrightarrow 12 = 4 \cdot a \Leftrightarrow 3 = a$$

Da jeg nu har fundet  $a$  kan jeg sætte den ind i  $f'_y$  sammen med punktet og så sætte den lig nul

$$0 = 3 \cdot 2^2 - b \Leftrightarrow 0 = 12 - b \Leftrightarrow b = 12$$

Konstanterne er dermed bestemt

$$a = 3$$

$$b = 12$$

Del 2: med hjælpemidler

**Opgave 10**

**Opgave 10** En funktion  $f$  af to variable er givet ved

$$f(x, y) = \ln\left(\frac{y^2 - y + 1}{x^2 + x + 1}\right).$$

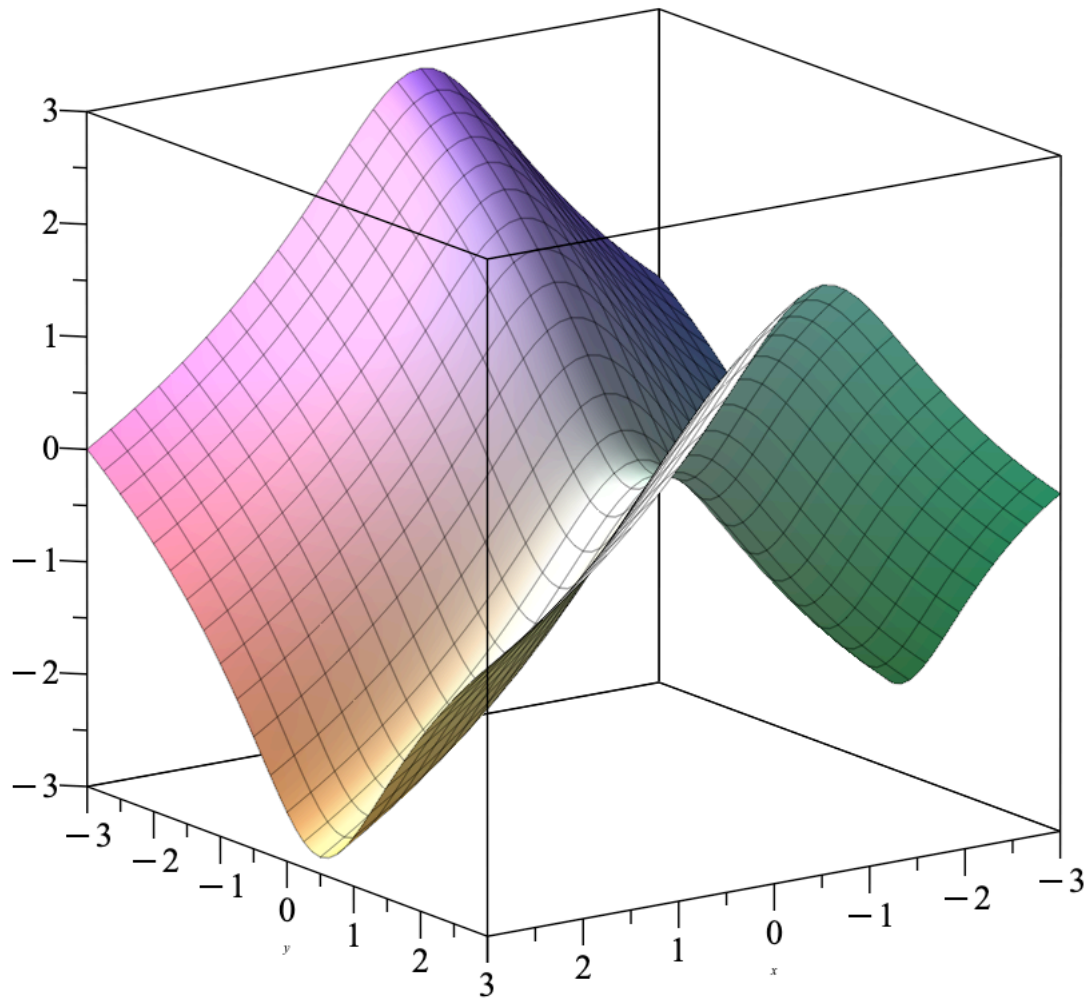
- a) Tegn grafen for  $f$  i grafvinduet  $[-3; 3] \times [-3; 3] \times [-3; 3]$ .  
b) Bestem  $\nabla f(1, 3)$ .

$$f(x, y) := \ln\left(\frac{y^2 - y + 1}{x^2 + x + 1}\right):$$

a)

for at tegne grafen vil jeg bruge plot3d

`plot3d(f(x, y), x = -3 .. 3, y = -3 .. 3, view = -3 .. 3)`



dermed er funktionen tegnet i det givne grafvindue

b)  
for at bestemme gradienten med kendte x og y værdier bruger jeg gradient kommandoen

$$\text{gradient}(f, [x, y] = [1, 3]) = \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{5}{7} \end{bmatrix}$$

dermed er gradienten bestemt

## Opgave 11

restart; with (Gym) :

**Opgave 11** Tabellen viser fedtprocenten hos 143 tilfældigt udvalgte mænd.

Fedtprocent	12,3	6,1	18,3	23,3
-------------	------	-----	------	------

Alle tabellens 143 data findes i den vedhæftede fil: Fedtprocent.xlsx

- a) Gør rede for, at fedtprocenten for mænd med god tilnærmelse kan beskrives ved en normalfordelt stokastisk variabel  $X$ .

For mænd anbefales en fedtprocent på mellem 8 og 25.

- b) Bestem  $P(8 \leq X \leq 25)$ , og giv en fortolkning af dette tal.

Kilde: SOCR

Havde ikke dataen tilgængelig :(

## Opgave 12

restart; with (Gym) :

**Opgave 12** En funktion  $f$  er løsning til differentiaalligningen

$$y' = e^x + 2 \cdot y .$$

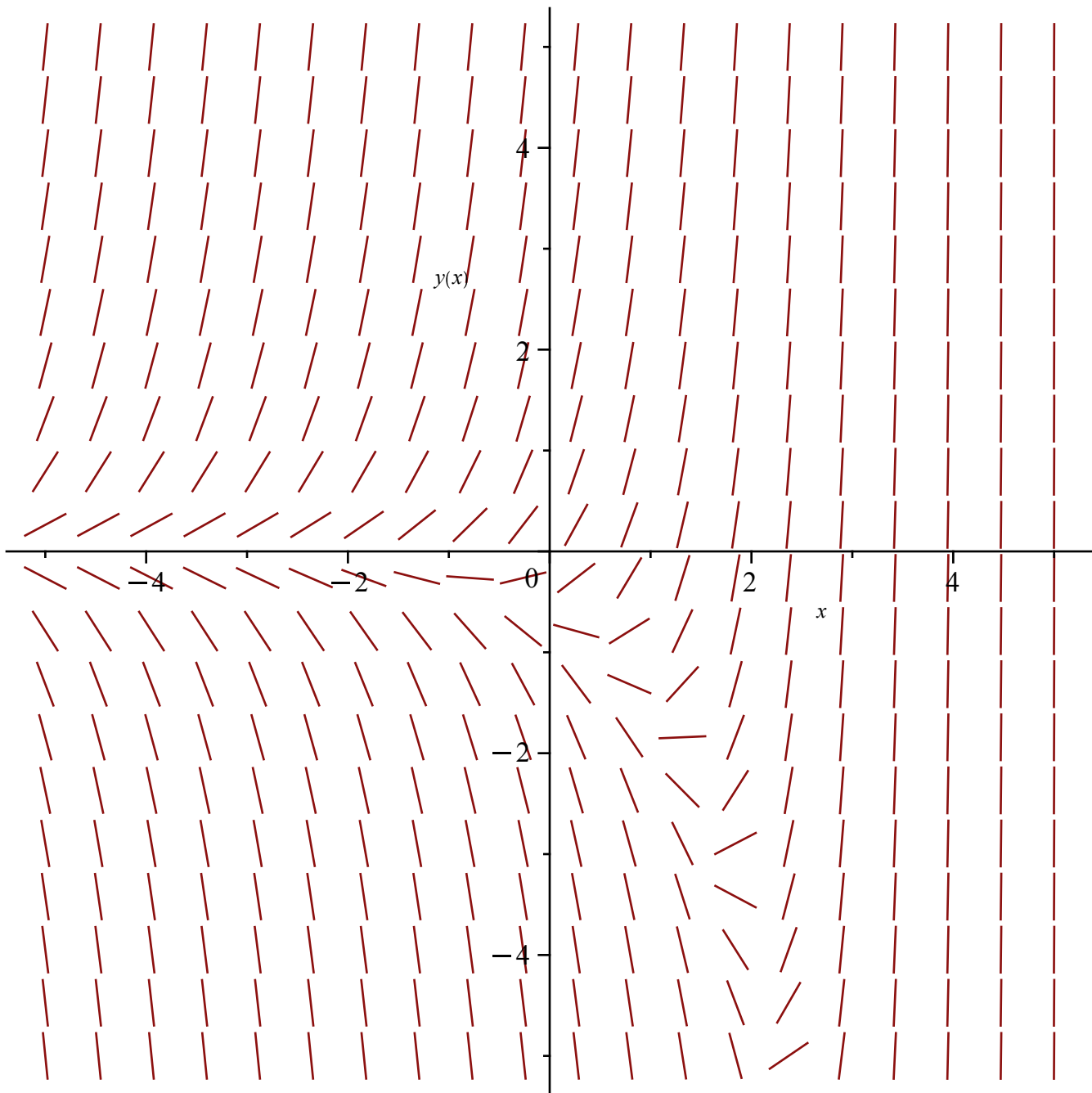
- a) Tegn et hældningsfelt for differentiaalligningen.

Grafen for  $f$  går gennem punktet  $P(1,2)$ .

- b) Bestem en forskrift for  $f$ .

a)

linjeelementer ( $y'(x) = e^x + 2 \cdot y(x)$ ,  $y(x)$ ,  $x = -5 \dots 5$ ,  $y = -5 \dots 5$ )



dermed er hældningsfeltet for differentialligningen tegnet.

b)  
for at bestemme en forskrift for  $f$  vil jeg bruge dsolve

$$dsolve(\{y'(x) = e^x + 2 \cdot y(x), y(1) = 2\}, y(x)) = y(x) = -e^x + e^{2x} (e^{-1} + 2 e^{-2})$$

dermed er forskriften bestemt

## Opgave 13

*restart, with (Gym) :*

**Opgave 13** Til en gymnasiefest deltager 400 elever.  
180 af eleverne er drenge, og 220 er piger.  
65 % af drengene har hvide sko på, mens 30 % af pigerne har hvide sko på.

Der udvælges en tilfældig elev fra festen.

- a) Bestem sandsynligheden for, at eleven har hvide sko på.

En anden tilfældigt udvalgt elev har hvide sko på.

- b) Bestem sandsynligheden for, at det er en pige.

a)

Sandsynligheden findes ved at dividere antallet af elever med hvide sko med det samlede antal elever:

$$P(VS) = \frac{183}{400} = 0.4575000000$$

b)

Vi ved nu, at eleven har hvide sko på (der er 183 mulige), og vi ønsker at vide sandsynligheden for, at denne elev er en pige (der er 66 piger med hvide sko):

$$P(P|VS) = \frac{66}{183} = 0.3606557377$$

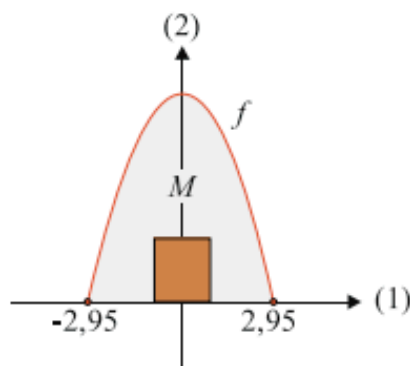
## Opgave 14

*restart, with (Gym) :*

### Opgave 14



Billedkilde: wikimedia



Ovenfor ses et billede af Priory Chapel i Saint Louis Abbey. Figuren til højre viser en model af det markerede vinduesparti indlagt i et koordinatsystem med enheden meter på begge akser.

I modellen afgrænses vinduespartiet af grafen for funktionen  $f$  givet ved

$$f(x) = -\frac{13}{6962} \cdot (400 \cdot x^2 - 3481) \quad , \quad -2,95 \leq x \leq 2,95.$$

a) Bestem kurvelængden af grafen for  $f$ .

I vinduespartiet er der en rektangulær dør med bredde 1,8 m og højde 2,0 m.

Det grå område  $M$  på figuren er afgrænset af grafen for  $f$ , førsteaksen og dørkarmen.

b) Bestem arealet af området  $M$ .

$$f(x) := -\frac{13}{6962} \cdot (400 \cdot x^2 - 3481) :$$

a)

jeg vil bruge formel (171) til at bestemme kurvelængden

$$L = \int_{-2,95}^{2,95} \sqrt{1 + f'(x)^2} \, dx = 14.79582581$$

dermed er kurvelængden fundet til at være lig 14.79582581 m

b)

for at bestemme arealet af området vil jeg finde integral af kurven også trække arealet af vinduespartiet

$$\int_{-2,95}^{2,95} f(x) \, dx - (1,8 \cdot 2) = 21.96666667$$

dermed er arealet af området M fundet til at være lig  $21.96666667 m^2$

## Opgave 15

restart; with (Gym) :

**Opgave 15** En vektorfunktion  $\vec{s}$  er givet ved

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} t^3 - 3t^2 - t + 8 \\ t + 4 \end{pmatrix}.$$

a) Bestem hastighedsvektoren  $\vec{v} = \vec{s}'(1)$ .

b) Bestem den spidse vinkel mellem  $\vec{v}$  og vandret.

En ret linje  $l$  har ligningen  $-3x + 13y + c = 0$ , hvor  $c$  er et tal.

c) Bestem de to værdier af  $c$ , hvor linjen  $l$  er tangent til banekurven for  $\vec{s}$ .

$$s(t) := \langle t^3 - 3 \cdot t^2 - t + 8, t + 4 \rangle :$$

$$x(t) := t^3 - 3 \cdot t^2 - t + 8 :$$

$$y(t) := t + 4 :$$

a)

for at bestemme hastighedsvektoren vil jeg tage den afledte af x og y

$$x'(t) = 3t^2 - 6t - 1$$

$$y'(t) = 1$$

$$\vec{v}(t) = s'(t) = \begin{pmatrix} 3t^2 - 6t - 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nu skal jeg bare bestemme den når t er lig 1

$$s'(1) = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

dermed er hastighedsvektoren fundet

b)

For at finde den spidse vinkel mellem hastighedvektoren og den vandrette vektor vil jeg først definere den vandrette vektor

$$e := \langle -1, 0 \rangle :$$

Nu bestemmer jeg vinklen via vinkel kommandoen

$$\text{vinkel}(s'(1), e) = 14.03624350$$

Den spidse vinkel mellem  $\vec{v}$  og vandret er 14 grader

En ret linje  $l$  har ligningen  $-3 \cdot x + 13 \cdot y + c = 0$  hvor  $c$  er et tal  
c) bestem de to værdier af  $c$ , hvor linjen  $l$  er tangent til banekurven for  $\vec{s}$

Først vil jeg definere normalvektoren for  $l$

$$n := \langle -3, 13 \rangle :$$

$n$  står ortogonalt på  $v$ , hvis skalarproduktet af de to vektorer er 0. Ud fra det kan jeg bestemme  $t$ -værdien hørende til de punkter hvor de står ortogonalt

$$n \cdot s'(t) = 0 \xrightarrow{\text{solve for } t} \left[ \left[ t = -\frac{2}{3} \right], \left[ t = \frac{8}{3} \right] \right]$$

jeg kan nu sætte disse ind i vektorfunktionen, og ved det finder jeg koordinaterne hvor  $n$  står ortogonalt på  $v$

$$s\left(-\frac{2}{3}\right) = \begin{bmatrix} \frac{190}{27} \\ \frac{10}{3} \end{bmatrix}$$

$$s\left(\frac{8}{3}\right) = \begin{bmatrix} \frac{80}{27} \\ \frac{20}{3} \end{bmatrix}$$

tangenterne til banekurven  $s$  i punkterne:  $\left(\frac{190}{27}, \frac{10}{3}\right)$  og  $\left(\frac{80}{27}, \frac{20}{3}\right)$

disse er givet ved ligningen  $-3 \cdot x + 13 \cdot y + c = 0$

for at bestemme  $c$  sætter jeg punterne ind i ligningen

$$-3 \cdot \frac{190}{27} + 13 \cdot \frac{10}{3} + c = 0 \xrightarrow{\text{solve } 200/9 + c = 0}$$

$$\left[ \left[ c = -\frac{200}{9} \right] \right] \quad (5.15.1)$$

$$-3 \cdot \frac{80}{27} + 13 \cdot \frac{20}{3} + c = 0 \xrightarrow{\text{solve } 700/9 + c = 0}$$

$$\left[ \left[ c = -\frac{700}{9} \right] \right] \quad (5.15.2)$$

altså når  $c = -\frac{200}{9} \vee c = -\frac{700}{9}$  så er linjen  $l$  tangent til banekurven for  $s$

*restart, with (Gym) :*

## 2stx241\_MAT\_A\_30052024

Del 1: uden hjælpemidler

### Opgave 1

**Opgave 1** En funktion  $f$  af to variable er givet ved

$$f(x, y) = x^3 - x^2 \cdot y.$$

**a)** Bestem  $f'_x(x, y)$ .

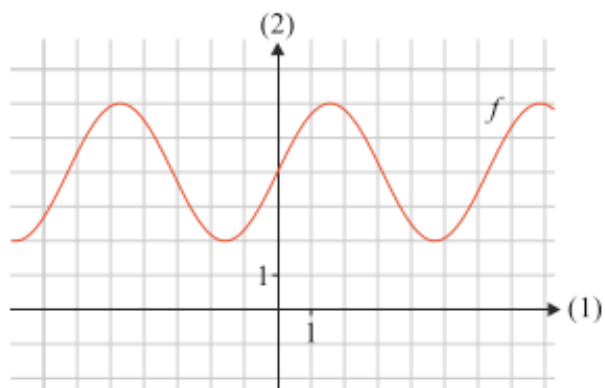
a)  
jeg bestemmer den partielt afledte med respekt til  $x$

$$\frac{\partial}{\partial x} (x^3 - x^2 \cdot y) = 3x^2 - 2x \cdot y$$

### Opgave 2

## Opgave 2

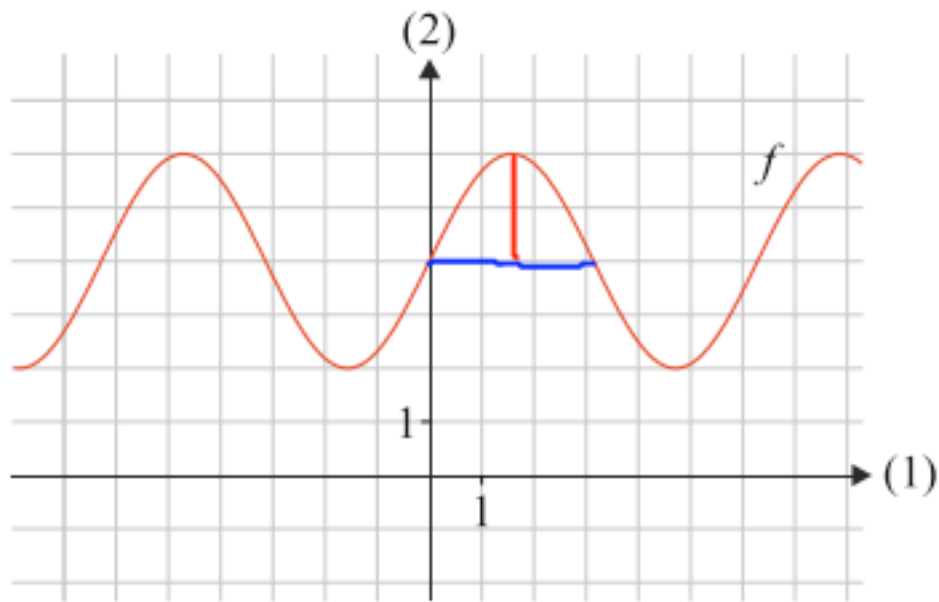
Bilag vedlagt



Figuren viser grafen for en harmonisk svingning  $f$  med forskriften  $f(x) = A \cdot \sin(x) + d$ .

**a)** Bestem tallene  $A$  og  $d$  ved grafisk aflæsning. Brug bilaget.

a)



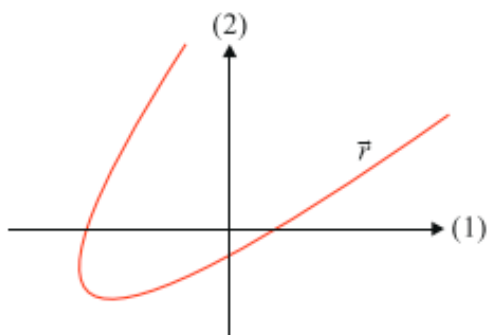
blå er  $d$ :  $d = 4$   
rød er  $A$ :  $A = 2$

## Opgave 3

**Opgave 3** På figuren ses banekurven for vektorfunktionen  $\vec{r}$  givet ved

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t^2 + 6t - 10 \\ t^2 + 2t - 8 \end{pmatrix}.$$

- a) Bestem  $\vec{r}(3)$ .
- b) Bestem  $t$ -værdierne til banekurvens skæringspunkter med førsteaksen.



a)  
jeg indsætter 3 på t's plads

$$r(3) = \begin{pmatrix} 3^2 + 6 \cdot 3 - 10 \\ 3^2 + 2 \cdot 3 - 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 + 18 - 10 \\ 9 + 6 - 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 7 \end{pmatrix}$$

b)  
På x-aksen er  $y = 0$ , så jeg skal løse:

$$t^2 + 2 \cdot t - 8 = 0$$

Dette er en andengradsligning. Jeg bruger formelen:

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$t = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{-2 \pm 6}{2}$$

$$t = 2 \vee t = -4$$

## Opgave 4

**Opgave 4** a) Reducér udtrykket

$$\frac{15 \cdot x \cdot (x^2 - y^2)}{5 \cdot x \cdot (x - y)}$$

a)

$$\frac{15 \cdot x \cdot (x^2 - y^2)}{5 \cdot x \cdot (x - y)} = 3 \cdot \frac{(x^2 - y^2)}{(x - y)} = 3 \cdot \frac{(x + y) \cdot (x - y)}{(x - y)} = 3 \cdot (x + y)$$

## Opgave 5

**Opgave 5** For en normalfordelt stokastisk variabel  $X$  er intervallet for de normale udfald givet ved  $[26;42]$ .

a) Bestem middelværdi og spredning for  $X$ .

a)

Intervallet skal opfylde:  $[\mu - 2 \cdot \sigma = 26, \mu + 2 \cdot \sigma = 42]$

Jeg opstiller ligningssystemet

$$\mu - 2 \cdot \sigma + \mu + 2 \cdot \sigma = 26 + 42 \Leftrightarrow 2 \cdot \mu = 68 \Leftrightarrow \mu = 34$$

jeg indsætter nu middelværdien i:  $\mu + 2 \cdot \sigma = 42$

$$34 + 2 \cdot \sigma = 42 \Leftrightarrow 2 \cdot \sigma = 8 \Leftrightarrow \sigma = 4$$

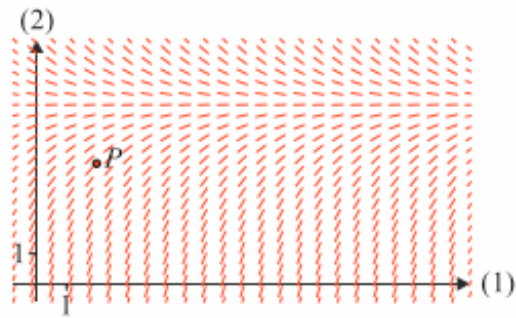
middel værdien og spredningen er dermed fundet:  $\mu = 34$  og  $\sigma = 4$

## Opgave 6

**Opgave 6** På figuren ses et hældningsfelt hørende til differentialligningen

$$y' = 3 - \frac{1}{2} \cdot y.$$

Funktionen  $f$  er en løsning til differentialligningen, og grafen for  $f$  går gennem punktet  $P(2,4)$ .

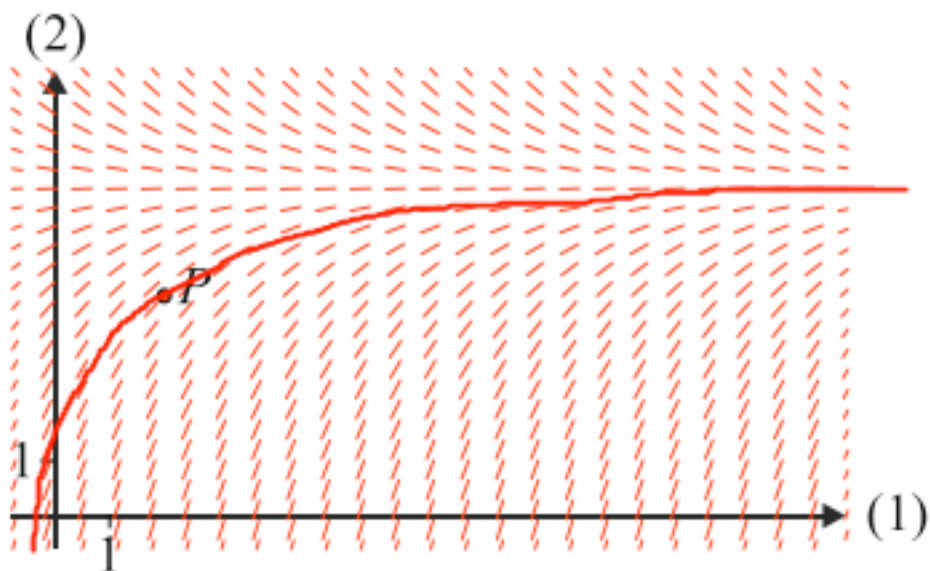


*Bilag vedlagt* a) Indtegn en skitse af grafen for  $f$  på det vedlagte bilag.

b) Bestem en ligning for tangenten til grafen for  $f$  i punktet  $P$ .

a)

Jeg skitserer grafen for  $f$



b)  
 jeg indsætter punktet i differentialligningen for at finde hældningen

$$y' = 3 - \frac{1}{2} \cdot 4 = 3 - 2 = 1$$

Jeg indsætter nu punktet og hældningen i:  $b = y - a \cdot x$   
 $b = 4 - 1 \cdot 2 = 2$

dermed kan jeg bestemme ligningen:  $y = x + 2$

## Opgave 7

**Opgave 7** En undersøgelse har vist, at 20 % af danske familier har hund, mens 5 % både har hund og kat.

a) Bestem sandsynligheden for, at en familie har kat, givet at de har hund.

*Kilde: Danmarks statistik*

a)

$$P(K|H) = \frac{P(K \cap H)}{P(H)} = \frac{0.05}{0.2} = 0.25$$

## Opgave 8

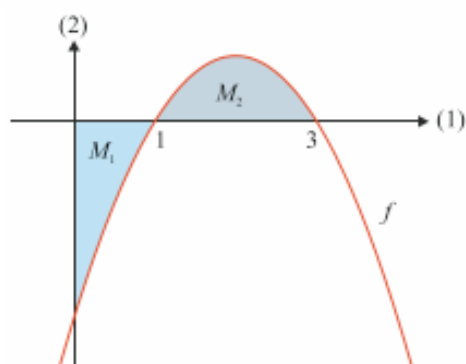
**Opgave 8** En funktion  $f$  er givet ved forskriften

$$f(x) = -3x^2 + 12x - 9.$$

a) Bestem  $\int f(x) dx$ .

Grafen for  $f$  afgrænser sammen med koordinat-systemets akser to områder  $M_1$  og  $M_2$ .

b) Bestem det samlede areal af områderne  $M_1$  og  $M_2$ .



a)

Jeg bestemmer integralet

$$\int -3x^2 + 12x - 9 dx = -x^3 + 6x^2 - 9x + c$$

b)

For at bestemme det samlede areal skal jeg først angive integralerne.  $M_1$  er under x-aksen, derfor skal  $M_1$  trækkes fra.

$$\int_1^3 -3x^2 + 12x - 9 dx - \int_0^1 -3x^2 + 12x - 9 dx = [-x^3 + 6x^2 - 9x]_1^3 - [-x^3 + 6x^2 - 9x]_0^1$$

$$[-x^3 + 6x^2 - 9x]_1^3 = -3^3 + 6 \cdot 3^2 - 9 \cdot 3 - (-1^3 + 6 \cdot 1^2 - 9 \cdot 1) = 0 - (-4) = 4$$

$$[-x^3 + 6x^2 - 9x]_0^1 = -1^3 + 6 \cdot 1^2 - 9 \cdot 1 = -4$$

$$\int_1^3 -3x^2 + 12x - 9 dx - \int_0^1 -3x^2 + 12x - 9 dx = [-x^3 + 6x^2 - 9x]_1^3 - [-x^3 + 6x^2 - 9x]_0^1 = 4 - (-4) = 8$$

Det samlede areal er dermed 8

## Opgave 9

**Opgave 9** En funktion  $f$  er bestemt ved  $f(x) = 3 \cdot e^x + 2$ .

a) Bestem den stamfunktion til funktionen  $f$ , hvis graf har linjen med ligningen  $y = 5x + 7$  som tangent.

a)

Jeg starter med at finde stamfunktionen til  $f$

$$\int 3 \cdot e^x + 2 \, dx = 3e^x + 2x + c$$

For at finde  $c$  kan jeg bruge tangentens hældning til at finde første koordinat i punktet:

$$f(x_0) = F'(x_0) = 5$$

$$3 \cdot e^x + 2 = 5 \Leftrightarrow 3 \cdot e^x = 3 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = \ln(1) \Leftrightarrow x = 0$$

Nu finder jeg anden koordinat i punktet ved at indsætte denne  $x$ -værdi i tangentens ligning

$$y = 5 \cdot 0 + 7 = 7$$

tangentens røringpunkt er  $P(0, 7)$

Jeg indsætter dette punkt i stamfunktionen for at finde  $c$

$$7 = 3e^0 + 2 \cdot 0 + c \Leftrightarrow 7 = 3 + c \Leftrightarrow c = 4$$

Stamfunktionen er givet ved  $F(x) = 3e^x + 2x + 4$

Del 2: med hjælpemidler

## Opgave 10

*restart, with(Gym) :*

**Opgave 10** En funktion  $f$  er givet ved

$$f(x, y) = x^2 + x \cdot y + y - \frac{1}{6}y^3.$$

**a)** Tegn grafen for  $f$  i vinduet  $[-10;10] \times [-10;10] \times [-10;10]$ .

Funktionen  $f$  har to stationære punkter.

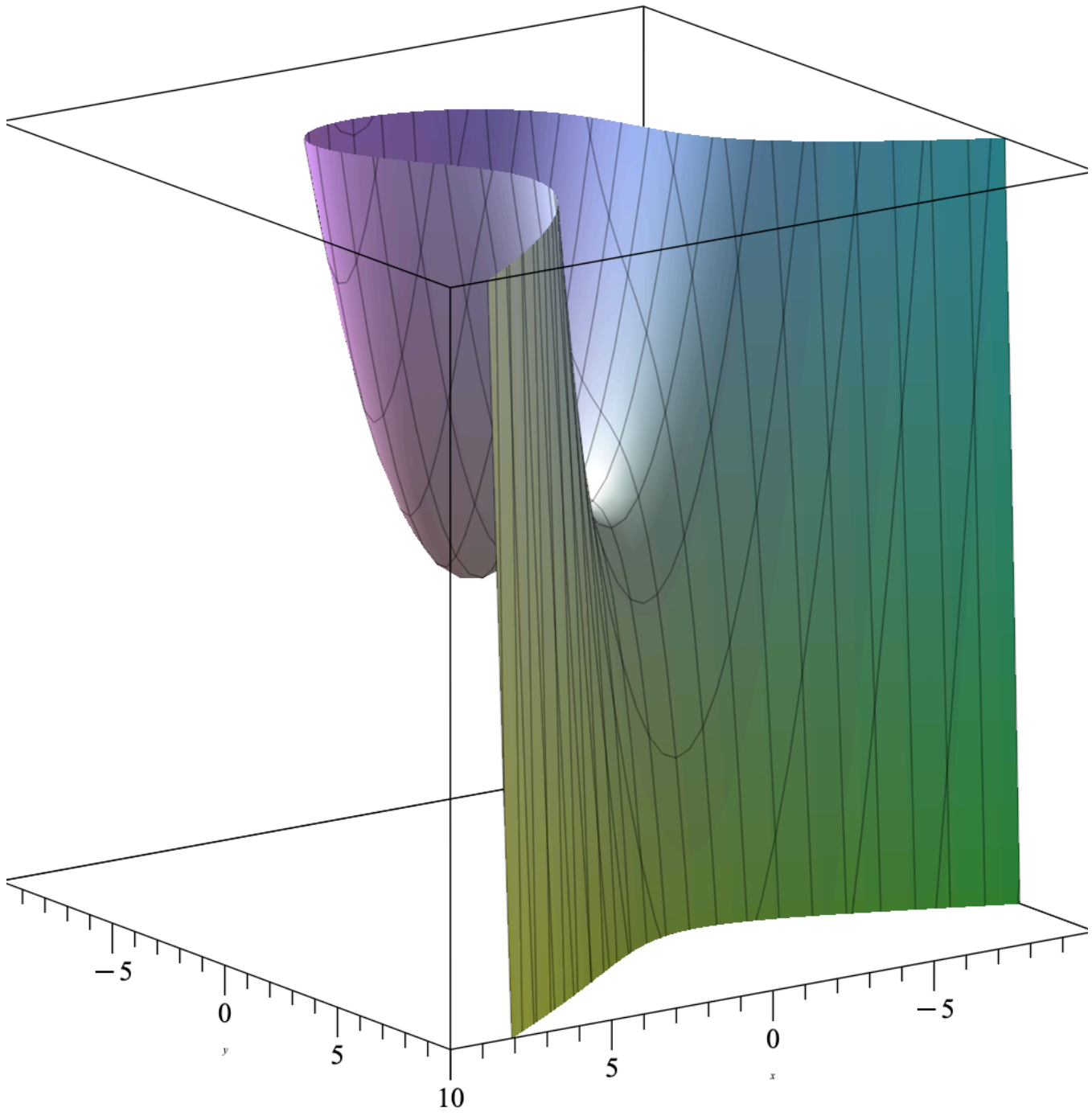
**b)** Bestem koordinatsættet til hvert af de to stationære punkter.

$$f(x, y) := x^2 + x \cdot y + y - \frac{1}{6} \cdot y^3 :$$

a)

jeg bruger plot3d for at tegne grafen

$$\text{plot3d}(f(x, y), x = -10 .. 10, y = -10 .. 10, \text{view} = -10 .. 10)$$



b)

Jeg finder de stationære punkter via:

$$\text{solve}\left(\left\{\frac{\partial}{\partial x}(f(x,y))=0, \frac{\partial}{\partial y}(f(x,y))=0\right\}\right)$$
$$\left\{x=-\frac{1}{2}, y=1\right\}, \{x=1, y=-2\} \quad (6.10.1)$$

Nu indsætter jeg disse værdier i funktionen for at få den sidste koordinat

$$f\left(-\frac{1}{2}, 1\right) = \frac{7}{12}$$

$$f(1, -2) = -\frac{5}{3}$$

De stationære punkter er dermed fundet:  $\left(-\frac{1}{2}, 1, \frac{7}{12}\right)$  og  $\left(1, -2, -\frac{5}{3}\right)$

## Opgave 11

*restart, with (Gym) :*

### Opgave 11



*Billedkilde: Danmarks Naturfredningsforening*

I en model kan udviklingen i antallet af ræve i et bestemt område beskrives ved differentiaalligningen

$$y' = 0,00094 \cdot y \cdot (220 - y),$$

hvor  $y = f(t)$  betegner antallet af ræve til tiden  $t$  (målt i antal år efter den første optælling).

Til tidspunktet  $t = 0$  var der 53 ræve.

- Med hvilken hastighed voksede antallet af ræve til tidspunktet  $t = 0$  ifølge modellen?
- Bestem en forskrift for  $f(t)$ .

For at finde hvilken hastighed de voksede ved tiden 0 sætter jeg den kendte information ind i

differentialligningen

$$y' = 0.00094 \cdot 53 \cdot (220 - 53) = 8.31994$$

Den voksede med 8.32 ræve pr år ved tidspunktet 0

b)

jeg bruger dsolve til at bestemme en forskrift

$$dsolve(\{y'(t) = 0.00094 \cdot y(t) \cdot (220 - y(t)), y(0) = 53\}, y(t))$$

$$y(t) = \frac{11660}{53 + 167 e^{-\frac{517 t}{2500}}} \quad (6.11.1)$$

dermed er forskriften bestemt

## Opgave 12

restart, with(Gym) :

**Opgave 12** En normalfordelt stokastisk variabel  $X$  har middelværdi 23 og spredning 4.

a) Bestem  $P(17 \leq X \leq 29)$ .

b) Bestem det positive tal  $k$ , så

$$P(X \geq k) = 0,8.$$

a)

For at bestemme sandsynligheden integrere jeg tæthedsfunktion

$$\int_{-\infty}^{29} \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi} \cdot 4} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-23}{4}\right)^2} dx - \int_{-\infty}^{17} \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi} \cdot 4} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-23}{4}\right)^2} dx \xrightarrow{\text{at 5 digits}} 0.86639$$

Sandsynligheden er dermed bestemt til at være 86.63%

b)

For at bestemme  $k$  vil jeg også integrere tæthedsfunktionen men hvor intervallet har  $k$

$$reelSolve\left(1 - \int_{-\infty}^k \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi} \cdot 4} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-23}{4}\right)^2} dx = 0.8, k\right)$$

$$19.63351507$$

(6.12.1)

Dermed er  $k$  fundet til at være 16.634

## Opgave 13

*restart, with(Gym) :*

**Opgave 13** Funktionerne  $f$  og  $g$  er for  $0 \leq x \leq 0,75$  bestemt ved

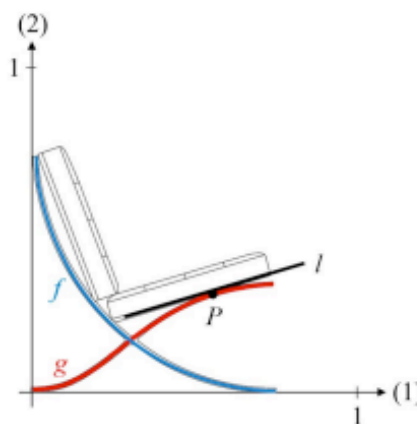
$$f(x) = 0,75 - \sqrt{0,75^2 - (x - 0,75)^2} \quad \text{og} \quad g(x) = -0,02 + \frac{0,36}{1 + 17 \cdot e^{-8,8 \cdot x}}.$$

a) Bestem koordinatsættet til skæringspunktet mellem graferne for  $f$  og  $g$ .

Billedet viser "Barcelona-stolen", designet i 1929 af Mies van der Rohe. Figuren viser stolen set i profil og indlagt i et koordinatsystem med enheden meter på begge akser.



Billedkilde: Viaduct Furniture



I en model kan de to krydsende metalbuer beskrives ved graferne for funktionerne  $f$  og  $g$ .

b) Bestem kurvelængden af grafen for  $g$ .

Undersiden af sædet er i modellen en del af en ret linje  $l$  med hældningskoefficient 0,29. Linjen  $l$  er tangent til grafen for  $g$  i et punkt  $P$ .

c) Bestem førstekoordinaten til  $P$ .

$$f(x) := 0,75 - \sqrt{0,75^2 - (x - 0,75)^2} :$$

$$g(x) := -0,02 + \frac{0,36}{1 + 17 \cdot e^{-8,8 \cdot x}} :$$

a)  
jeg bestemmer skæringspunktet ved at sætte funktionerne lig hinanden

$$\text{intervalsolve}(f(x) = g(x), x = 0 .. 0.75)$$

[0.3047945401]

(6.13.1)

Jeg indsætter nu denne  $x$ -værdi i en af funktionerne for at finde den tilsvarende  $y$ -værdi

$$f(0.3047945401) = 0.1464338491$$

Skæringspunktet er dermed fundet til at være (0.3047945401, 0.1464338491)

b)

For at bestemme kurvelængden af g bruger jeg formelen for kurvelængden:  $L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$

Jeg bruger intervallet  $0 \leq x \leq 0.75$

$$\int_0^{0.75} \sqrt{1 + g'(x)^2} dx$$

0.8357888619

(6.13.2)

Dermed er kurvelængden af g fundet til at være 0.8357888619 meter

c)

Jeg vil bruge tangentens hældning til at finde første koordinat i punktet:  $g(x_0) = G'(x_0) = 0.29$

$$g(x) = 0.29 \xrightarrow{\text{solve for } x} [[x = 0.5292912086]]$$

Dermed er P's førstekoordinat fundet til at være 0.5292912086

## Opgave 14

restart; with (Gym) :

**Opgave 14** I Ecuador har 1,6 % af kvægbestanden sygdommen brucellose.

En bestemt test for brucellose viser positiv 65 % af de gange, hvor koen har sygdommen, mens testen viser positiv 1,1 % af de gange, hvor koen ikke har sygdommen.

- Bestem sandsynligheden for, at en tilfældigt udvalgt ko testes positiv.
- Bestem sandsynligheden for, at en ko har brucellose, givet at den er testet positiv.

*Kilde: Diagnosis of Bovine Brucellosis in Small and Medium Cattle Holdings in Ecuador*

a)

Hændelse B: En ko har brucellose.

Hændelse +: En ko tester positiv for brucellose.

$$P(B) = 0.016 \text{ og } P(+|B) = 0.65 \text{ og } P(+|\bar{B}) = 0.011$$

Jeg skal bestemme sandsynligheden for, at en tilfældigt udvalgt ko testes positiv, dvs. P(+). Vi benytter loven om total sandsynlighed:

$$P(+ ) = P(+ | B) \cdot P(B) + P(+ | \bar{B}) \cdot P(\bar{B})$$

$$P(\bar{B}) = 1 - 0.016 = 0.984$$

$$P(+ ) = 0.65 \cdot 0.016 + 0.011 \cdot 0.984 = 0.021224$$

Sandsynligheden for, at en tilfældigt udvalgt ko testes positiv, er 2.1%.

b)

Sandsynligheden for, at en ko har brucellose, givet at den er testet positiv, er  $P(B | + )$ . Vi bestemmer sandsynligheden med Bayes' sætning:

$$P(B | + ) = \frac{P(+ | B) \cdot P(B)}{P(+ )}$$

$$P(B | + ) = \frac{0.65 \cdot 0.016}{0.021224} = 0.4900113080$$

Sandsynligheden for, at en ko har brucellose, givet at den er testet positiv, er 49.0%

## Opgave 15

*restart; with(Gym) :*

**Opgave 15** En vektorfunktion  $\vec{s}$  er givet ved

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} t^3 + 2t^2 - 3t + 5 \\ t^2 + 2t + 4 \end{pmatrix}.$$

Banekurven for  $\vec{s}$  har et dobbelt punkt i  $P(5, 7)$ .

- Bestem den spidse vinkel mellem hastighedsvektorerne i punktet  $P$ .
- Bestem koordinatsættet til det punkt på banekurven for  $\vec{s}$ , hvor afstanden til punktet  $Q(1, 0)$  er mindst.

$$s(t) := \langle t^3 + 2 \cdot t^2 - 3 \cdot t + 5, t^2 + 2 \cdot t + 4 \rangle :$$

$$x(t) := t^3 + 2 \cdot t^2 - 3 \cdot t + 5 :$$

$$y(t) := t^2 + 2 \cdot t + 4 :$$

a)

Jeg bestemmer først de t-værdier som hører til P

$$\text{solve}([x(t) = 5, y(t) = 7], t)$$

$$\{t = -3\}, \{t = 1\}$$

**(6.15.1)**

For at finde vinklen skal jeg finde vinklen mellem hastighedsvektorerne med disse t-værdier

$$\text{vinkel}(s'(-3), s'(1))$$

Den spidse vinkel mellem hastighedsvektorerne i punktet P er 63.43 grader

b)

Jeg opstiller først en funktion  $f(t)$  for afstanden mellem et generelt punkt på banekurven og punktet  $Q(11, 0)$  ved hjælp af afstandsformlen:

$$f(t) := \sqrt{(x(t) - 11)^2 + (y(t) - 0)^2} :$$

For at finde det punkt, hvor afstanden er mindst, differentierer jeg afstandsfunktionen og finder det  $t$ , hvor den afledede er lig 0:

$$t_{\text{værdi}} := \text{fsolve}(f'(t) = 0) :$$

Dette giver mig den  $t$ -værdi, der minimerer afstanden. For at finde selve koordinatsættet til punktet på banekurven, indsætter jeg denne  $t$ -værdi i funktionerne for  $x(t)$  og  $y(t)$

$$x(t_{\text{værdi}}) = 10.24394663$$

$$y(t_{\text{værdi}}) = 3.124740235$$

Koordinatsættet til det punkt på banekurven, hvor afstanden til punktet  $Q(11, 0)$  er mindst er  $(10.24394663, 3.124740235)$

*restart, with(Gym) :*

## N2stx241\_MAT\_A\_30052024

Del 1: uden hjælpemidler

### Opgave 1

**Opgave 1** En funktion  $f$  af to variable er givet ved

$$f(x, y) = 2y^3 - x \cdot y^2 + 5x .$$

**a)** Bestem  $f(-2, 3)$ .

a)

jeg indsætter punktet i funktionen

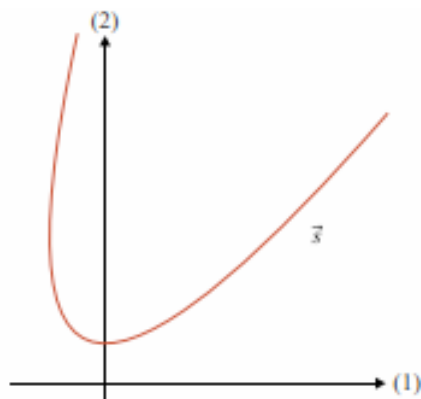
$$f(-2, 3) = 2 \cdot 3^3 - (-2) \cdot 3^2 + 5 \cdot (-2) = 54 + 18 - 10 = 62$$

### Opgave 2

**Opgave 2** En vektorfunktion  $\vec{s}$  er givet ved

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} t^2 - 4t \\ 2t^2 + 3 \end{pmatrix}.$$

- a) Bestem hastighedsvektoren  $\vec{v}(t)$ .
- b) Bestem den værdi af  $t$ , hvor  $\vec{v}(t)$  er parallel med vektoren  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .



a)  
jeg tager den afledte af vektorfunktionen

$$s'(t) = \begin{pmatrix} 2 \cdot t - 4 \\ 4 \cdot t \end{pmatrix} = v(t)$$

b)  
For at bestemme værdien er  $t$  hvor hastighedsvektoren er parallel med den givne vektor skal jeg finde den  $t$ -værdi hvor at determinanten af de to vektorer er lig 0

$$\det\left(v(t), \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -4 \cdot t \\ 2 \cdot t - 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -4 \cdot t \cdot 1 + (2 \cdot t - 4) \cdot 1 = 0$$

jeg skal nu løse denne ligning:

$$-4 \cdot t \cdot 1 + (2 \cdot t - 4) \cdot 1 = 0$$

$-4 \cdot t \cdot 1 + (2 \cdot t - 4) \cdot 1 = 0 \Leftrightarrow -4 \cdot t + 2 \cdot t - 4 = 0 \Leftrightarrow -2 \cdot t - 4 = 0 \Leftrightarrow -2 \cdot t = 4 \Leftrightarrow t = -2$   
 $t$ -værdien hvor at hastighedsvektoren er parallel med den givne vektorer er  $t = -2$

### Opgave 3

**Opgave 3** En funktion  $f$  er løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y+3}{\sqrt{x+1}},$$

og grafen for  $f$  går gennem punktet  $P(3, 7)$ .

- a) Bestem linjeelementet i  $P$ .

a)  
jeg bruger definitionen af linjeelement:  $(x_0, y_0, y'_0)$   
Jeg indsætter nu bare punktet i differentialligningen for at finde den sidste koordinat

$$\frac{dy}{dx} = \frac{7+3}{\sqrt{3+1}} = \frac{10}{\sqrt{4}} = \frac{10}{2} = 5$$

Linjeelementet er dermed fundet til at være: (3, 7, 5)

## Opgave 4

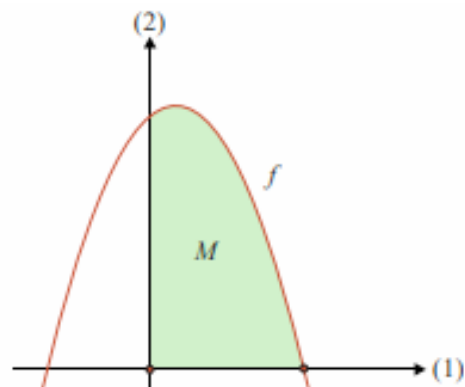
**Opgave 4** En funktion  $f$  er givet ved

$$f(x) = -x^2 + x + 6.$$

a) Bestem  $\int f(x) dx$ .

I første kvadrant afgrænser grafen for  $f$  sammen med koordinatsystemets akser et område  $M$ .

b) Bestem arealet af  $M$ .



a)

jeg integrerer funktionen

$$\int -x^2 + x + 6 dx = \frac{-x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 6 \cdot x + c$$

b)

For at bestemme  $M$  skal jeg først finde skæringspunkterne med x-aksen

$$-x^2 + x + 6 = 0$$

jeg factorisere

$$(-x - 2)(x - 3) = 0$$

jeg bruger nulreglen

$$x = -2 \vee x = 3$$

Men da  $M$  befinder sig kun i første kvadrant bruger jeg kun  $x$  når den er lig 3

nu indsætter jeg mit interval i integralet

$$\begin{aligned} \int_0^3 -x^2 + x + 6 dx &= \left[ \frac{-x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 6 \cdot x \right]_0^3 = \frac{-3^3}{3} + \frac{3^2}{2} + 6 \cdot 3 = -9 + \frac{9}{2} + 18 = -\frac{18}{2} + \frac{9}{2} \\ &+ 18 = \frac{-18 + 9}{2} + 18 = \frac{-9}{2} + \frac{36}{2} = \frac{-9 + 36}{2} = \frac{27}{2} \end{aligned}$$

## Opgave 5

**Opgave 5** a) Reducér udtrykket  $\frac{(2a)^2 \cdot 3b}{6a}$ .

a)

$$\frac{(2 \cdot a)^2 \cdot 3 \cdot b}{6 \cdot a} = \frac{4 \cdot a^2 \cdot 3 \cdot b}{6 \cdot a} = \frac{12 \cdot a \cdot b}{6} = 2 \cdot a \cdot b$$

## Opgave 6

**Opgave 6** En funktion  $f$  er givet ved

$$f(x) = (3x^2 + 5) \cdot \cos(x).$$

a) Bestem  $f(0)$ .

b) Bestem  $f'(x)$ .

a)  
jeg indsætter nul på x's plads

$$f(0) = (3 \cdot 0^2 + 5) \cdot \cos(0) = (0 + 5) \cdot 1 = 5$$

b)  
jeg tager den afledte af funktionen

$$f'(x) = 6x \cdot \cos(x) - \sin(x) \cdot (3x^2 + 5)$$

## Opgave 7

**Opgave 7** I et sandsynlighedsfelt  $(U, P)$  er givet to hændelser  $A$  og  $B$ .

Det oplyses, at  $P(A) = 0,43$ ,  $P(B) = 0,36$  og  $P(A \cup B) = 0,61$ .

a) Bestem  $P(A \cap B)$  og  $P(A|B)$ .

a)  
 $P(A) = 0.43$  og  $P(B) = 0.36$  og  $P(A \cup B) = 0.61$

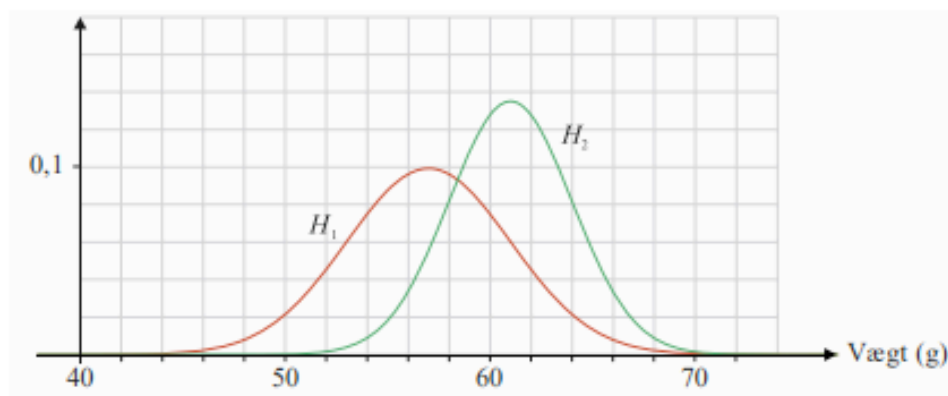
$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0.43 + 0.36 - 0.61 = 0.18$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.18}{0.36} = 0.5$$

## Opgave 8 \*

### Opgave 8

Bilag vedlagt



To hønseserier  $H_1$  og  $H_2$  producerer æg.

For begge hønseserier kan vægten af æggene (målt i gram) antages at være normalfordelte. Figuren viser grafen for tæthedsfunktionen for hver af de to normalfordelinger.

Spredningen for vægten af æggene er 4 gram for  $H_1$  og 3 gram for  $H_2$ .

Hønseserierne sælger æg med vægtangivelsen "M/L", som betyder, at æggene skal veje mellem 53 gram og 72 gram.

- a) Undersøg for hvert af hønseserierne, om de normale udfald for æggenes vægt overholder vægtkravet.

a)

Vi får oplyst, at for to hønseserier,  $H_1$  og  $H_2$ , antages vægten af æggene (målt i gram) at være normalfordelte.

Vi får oplyst, at spredningen for vægten af æggene er 4g for  $H_1$  og 3g for  $H_2$ .

Vi aflæser på figuren, at middelværdien af vægten af æggene er 57g for  $H_1$  og 61g for  $H_2$ .

Vi bestemmer de normale udfald for æggenes vægt for hvert hønseri.

$$\begin{aligned}
 H_1: \mu_1 - 2\sigma_1 &= 57 - 2 \cdot 4 \\
 &= 57 - 8 \\
 &= 49
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mu_1 + 2\sigma_1 &= 57 + 2 \cdot 4 \\
 &= 57 + 8 \\
 &= 65
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H_2: \mu_2 - 2\sigma_2 &= 61 - 2 \cdot 3 \\
 &= 61 - 6 \\
 &= 55
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mu_2 + 2\sigma_2 &= 61 + 2 \cdot 3 \\
 &= 61 + 6 \\
 &= 67
 \end{aligned}$$

Vi får oplyst, at æggene skal veje mellem 53g og 72g. De normale udfald for æggenes vægt er 49-65g for  $H_1$  og 55-67 for  $H_2$ . Hos  $H_1$  overholder de normale udfald for æggenes vægt ikke vægtkravet. Hos  $H_2$  overholder de normale udfald for æggenes vægt vægtkravet.

## Opgave 9

**Opgave 9** En funktion  $f$  er løsning til differentialligningen

$$y' = k \cdot y.$$

Det oplyses, at  $f(0) = 4$  og  $f'(0) = 2$ .

a) Bestem en forskrift for  $f$ .

a)  
jeg bruger separation af variable

$$\frac{dy}{dx} = k \cdot y \Leftrightarrow \frac{1}{y} \cdot dy = k \cdot dx \Leftrightarrow \int \frac{1}{y} dy = \int k dx \Leftrightarrow \ln(y) = k \cdot x + c \Leftrightarrow y = e^{k \cdot x} \cdot c$$

Jeg indsætter nu punktet  $f(0) = 4$

$$4 = e^{k \cdot 0} \cdot c \Leftrightarrow 4 = c$$

$$y = e^{k \cdot x} \cdot 4$$

For at finde  $k$  indsætter jeg den kendte information i selve differentialligningen

$$2 = k \cdot 4 \Leftrightarrow k = \frac{1}{2}$$

Forskriften er dermed

$$y = e^{\frac{1}{2} \cdot x} \cdot 4$$

Del 2: med hjælpemidler

## Opgave 10

*restart, with(Gym) :*

**Opgave 10** En vektorfunktion  $\vec{s}(t)$  er givet ved

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} t^2 - 4 + e^t \\ 8 - t^3 \end{pmatrix}.$$

- Bestem  $t$ -værdien for det punkt  $P$ , hvor parameterkurven for  $\vec{s}$  skærer førsteaksen.
- Bestem den spidse vinkel mellem førsteaksen og tangenten til parameterkurven i punktet  $P$ .

$$s(t) := \langle t^2 - 4 + e^t, 8 - t^3 \rangle :$$

$$x(t) := t^2 - 4 + e^t :$$

$$y(t) := 8 - t^3 :$$

a)

For at finde hvor den skærer førsteaksen skal jeg sætte  $y$  lig 0

$$y(t) = 0 \xrightarrow{\text{solve for } t} \left[ [t = 2], [t = -1 - I\sqrt{3}], [t = -1 + I\sqrt{3}] \right]$$

Kun et svar er reelt de andre er komplekse, så  $t = 2$

b)

retningsvektoren for tangenten i punktet  $P$  er den afledte af  $s$  med 2 på  $t$ 's plads. Enhedsvektoren er

$$e := \langle 1, 0 \rangle :$$

$$\text{vinkel}(e, s'(2))$$

Den spidsevinkel mellem førsteaksen og tangenten til parameterkurven i P er 46.5 grader

## Opgave 11

restart, with(Gym) :

**Opgave 11** En normalfordelt stokastisk variabel  $X$  har middelværdi  $\mu = 700$  og spredning  $\sigma = 58$ .

a) Bestem  $P(625 \leq X)$ .

b) Tegn grafen for fordelingsfunktionen for  $X$ .

a)

For at bestemme sandsynligheden integrere jeg tæthedsfunktion

$$1 - \int_{-\infty}^{625} \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi} \cdot 58} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-700}{58}\right)^2} dx \xrightarrow{\text{at 5 digits}} 0.90201$$

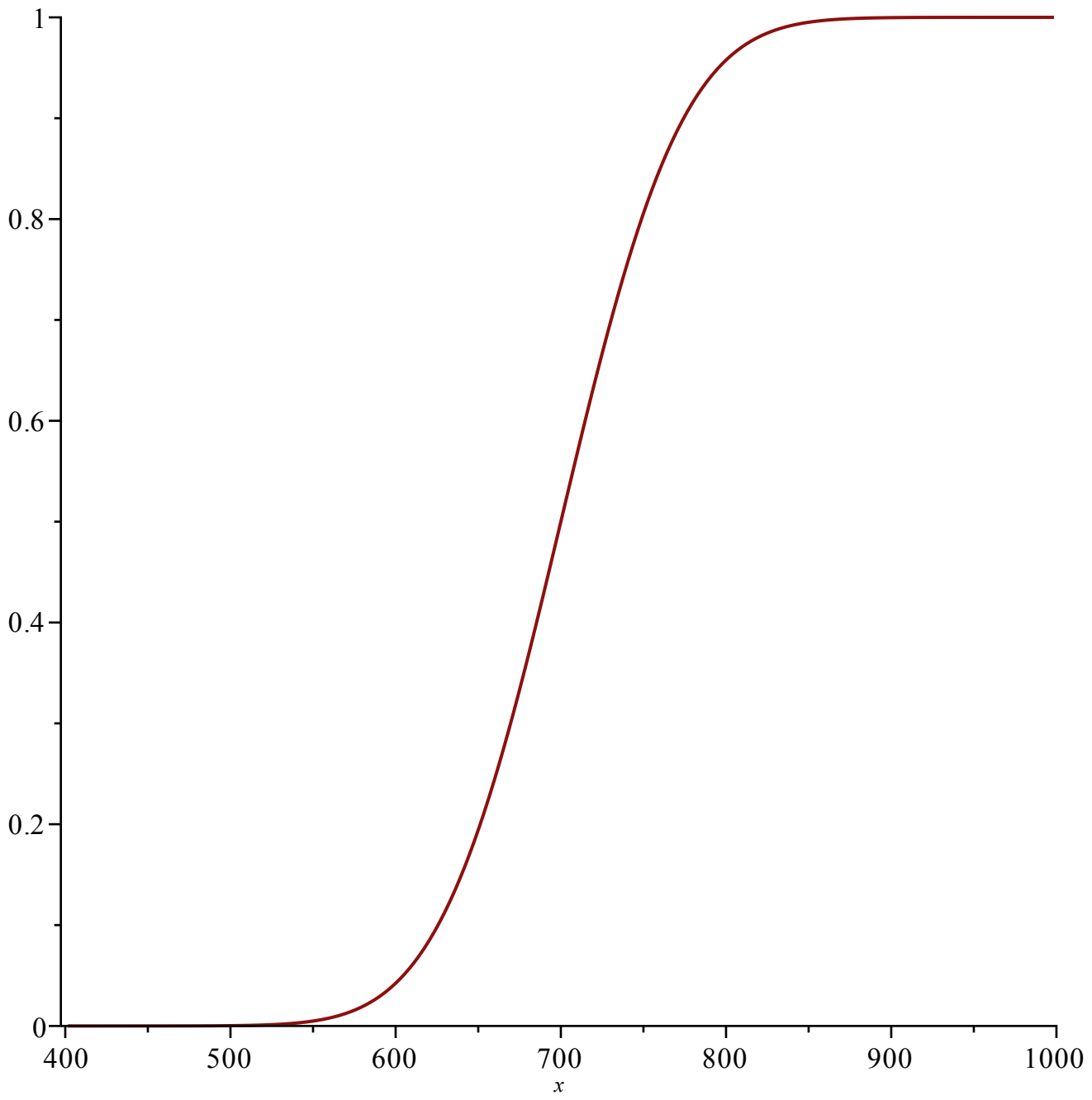
sandsynligheden er altså 90.2%

b)

jeg tegner fordelingsfunktionen for X

$$F(x) := \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi} \cdot 58} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-700}{58}\right)^2} dx :$$

plot(F(x), x = 400 ..1000)



## Opgave 12

*restart, with (Gym) :*

## Opgave 12



Figur 1

Billedkilde: Living in harmony



Figur 2

Figur 1 viser et foto af et vindue. Figur 2 viser en model af vinduets over- og underkant i et koordinatsystem med enheden cm på begge akser.

Vinduets overkant kan beskrives ved funktionen  $f$  givet ved

$$f(x) = 0,000003 \cdot x^4 - 0,01676 \cdot x^2 + 60, \quad -52 \leq x \leq 52.$$

Vinduets underkant kan beskrives ved funktionen  $g$  givet ved

$$g(x) = 0,000002 \cdot x^4 - 0,01051 \cdot x^2 + 21, \quad -52 \leq x \leq 52.$$

- Bestem arealet af vinduet.
- Bestem omkredsen af vinduet.

$$f(x) := 0.000003 \cdot x^4 - 0.01676 \cdot x^2 + 60 :$$

$$g(x) := 0.000002 \cdot x^4 - 0.01051 \cdot x^2 + 21 :$$

a)  
Jeg tager integralet af de to funktioner hvor  $f$  er først og intervallet er  $-52$  til  $52$

$$\int_{-52}^{52} f(x) - g(x) dx = 3622.214946$$

Dermed er arealet af vinduet fundet til at være lig  $3622.214946 \cdot \text{cm}^2$

b)  
Omkredsen finder jeg vha kurvelængder

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

$$\int_{-52}^{52} \sqrt{1 + f'(x)^2} dx + \int_{-52}^{52} \sqrt{1 + g'(x)^2} dx + 2 \cdot (f(52) - g(52)) = 282.9208425$$

Vinduets omkreds er  $282.92 \text{ cm}$

## Opgave 13

restart, with(Gym) :

**Opgave 13** En funktion  $f$  er givet ved

$$f(x, y) = x^3 + y^2 - 3x - 2y + 3.$$

Funktionen  $f$  har to stationære punkter.

- Bestem koordinatsættet til hvert af de to stationære punkter.
- Bestem arten af hvert af de to stationære punkter.

$$f(x, y) := x^3 + y^2 - 3 \cdot x - 2 \cdot y + 3 :$$

a)

Jeg finder de stationære punkter via:

$$\text{solve}\left(\left\{\frac{\partial}{\partial x}(f(x, y)) = 0, \frac{\partial}{\partial y}(f(x, y)) = 0\right\}\right)$$
$$\{x = 1, y = 1\}, \{x = -1, y = 1\}$$

(7.13.1)

Jeg indsætter nu disse punkter i funktionen for at finde z-koordinaten

$$f(1, 1) = 0$$

$$f(-1, 1) = 4$$

De stationære punkter hedder:  $(1, 1, 0)$  og  $(-1, 1, 4)$

b)

for at bestemme arten bruger jeg kommandoen art

$$\text{art}(f(x, y), [x, y] = [1, 1])$$

$$r = 6 \quad s = 0 \quad t = 2$$

$$\text{Determinanten er } \Delta = r t - s^2 = 12$$

Da  $\Delta > 0$  og  $r > 0$  har funktionen et lokalt minimum i

$$[1, 1]$$

og funktionsværdien er 0

arten for det første punkt er altså et lokalt minimum

$$\text{art}(f(x, y), [x, y] = [-1, 1])$$

$$r = -6 \quad s = 0 \quad t = 2$$

$$\text{Determinanten er } \Delta = r t - s^2 = -12$$

Da  $\Delta < 0$  har funktionen et sadelpunkt i

$$[-1, 1]$$

og funktionsværdien er 4

arten for det andet punkt er altså et saddelpunkt

## Opgave 14 \*

*restart, with(Gym) :*

**Opgave 14** I en bestemt håndboldklub er 20 % af medlemmerne tatoverede.  
Blandt de af klubbens medlemmer, der er tatoverede, er 45 % kvinder.

- a) Bestem sandsynligheden for, at et tilfældigt udvalgt medlem af klubben er en kvinde, der er tatoveret.

53 % af klubbens medlemmer er kvinder.

- b) Bestem sandsynligheden for, at et tilfældigt udvalgt kvindeligt medlem er tatoveret.

a)

Vi får oplyst, at i en bestemt håndboldklub er 20% af medlemmerne tatoverede, og at 45% af de tatoverede medlemmer er kvinder.

Vi opstiller følgende hændelser:

$T$ : et medlem af håndboldklubben er tatoveret.

$K$ : et medlem af håndboldklubben er kvinde.

Vi skal bestemme sandsynligheden for, at et tilfældigt udvalgt medlem er en kvinde, der er tatoveret, dvs.  $P(K \cap T)$ .

Vi har fået oplyst, at  $P(T) = 0,20$ , og at  $P(K | T) = 0,45$ .

Vi bestemmer  $P(K \cap T)$ :

$$0,45 \cdot 0,20 = 0,0900$$

Sandsynligheden for, at et tilfældigt udvalgt medlem af klubben er en kvinde, der er tatoveret, er 9%.

b)

Vi får oplyst, at 53% af klubbens medlemmer er kvinder, dvs. at  $P(K) = 0,53$ . Vi skal bestemme sandsynligheden for, at et tilfældigt udvalgt kvindeligt medlem er tatoveret, dvs.  $P(T|K)$ . Vi ved, at

$$P(T|K) = \frac{P(K \cap T)}{P(K)}$$

Vi ved fra a), at  $P(K \cap T) = 0,09$ . Vi bestemmer  $P(T|K)$ :

$$\frac{0.09}{0.53} = 0.1698113208$$

Sandsynligheden for, at et tilfældigt udvalgt kvindeligt medlem er tatoveret, er 17%.

## Opgave 15

restart; with (Gym) :

### Opgave 15



Billedkilde: efloraofindia.com

I en model kan væksten af et bestemt tropisk træ beskrives ved differentialligningen

$$\frac{dh}{dt} = 0,38h - 0,00046h^2,$$

hvor  $h$  er højden af træet (målt i cm), og  $t$  er træets alder (målt i år fra det tidspunkt, hvor træet blev plantet). Da træet blev plantet, havde det højden 82 cm.

- Bestem en forskrift for  $h(t)$ .
- Hvad er træets alder ifølge modellen, når det vokser hurtigst?

a)  
jeg bruger dsolve til at bestemme en forskrift

$dsolve(\{h'(t) = 0.38 \cdot h(t) - 0.00046 \cdot h(t)^2, h(0) = 82\}, h(t))$

$$h(t) = \frac{779000}{943 + 8557 e^{-\frac{19t}{50}}} \quad (7.15.1)$$

b)  
Jeg definere lige h(t)

$$h(t) := \frac{\frac{779000}{943}}{\frac{943}{943} + \frac{8557 e^{-\frac{19t}{50}}}{943}}$$

$$h := t \mapsto \frac{19000}{23 \cdot \left( 1 + \frac{8557 \cdot e^{-\frac{19 \cdot t}{50}}}{943} \right)} \quad (7.15.2)$$

For at finde hvor modellen vokser hurtigst skal jeg bruge information omkring logistisk vækst:

$$y = \frac{M}{2} = \frac{19000}{2}$$

$$\text{solve} \left( h(t) = \frac{779000}{2}, t \right)$$

$$\text{solve} \left( h(t) = \frac{19000}{23}, t \right) = -\frac{50 \ln \left( \frac{943}{8557} \right)}{19} \xrightarrow{\text{at 5 digits}} 5.8037$$

væksthastigheden er størst efter 5.8 år dvs at modellen er træet 5.8 når det vokser hurtigst

## Opgave 16

restart; with (Gym) :

**Opgave 16** En funktion  $f$  er givet ved

$$f(x) = e^{x^3 - 3x^2 + kx - 1}, \quad \text{hvor } k \text{ er et tal.}$$

a) Bestem tallet  $k$ , så grafen for  $f$  har netop én vandret tangent.

$$f(x) := e^{x^3 - 3 \cdot x^2 + k \cdot x - 1} :$$

Jeg starter med at tage den afledte af funktionen

$$f'(x) = (3x^2 + k - 6x) e^{x^3 + kx - 3x^2 - 1}$$

For at finde de vandrette tangenter, sættes den afledte funktion lig med nul, men da eksponentialfunktionen  $e^x > 0$  kan denne del aldrig blive nul

Ligningen er derfor udelukkende afhængig af, at andengradspolynomiet i parentes er lig med nul:

$$3x^2 + k - 6x = 0$$

For at denne andengradsligning har netop én løsning (hvilket sikrer netop én vandret tangent), skal diskriminanten  $D$  være lig med nul

$$(-6)^2 - 4 \cdot 3 \cdot k = 0 \xrightarrow{\text{solve } 36 - 12 \cdot k = 0} [[k = 3]]$$

Tallet skal være  $k = 3$ , for at grafen for  $f$  har netop én vandret tangent.

restart; with(Gym) :

## stx243\_MAT\_A\_04122024

Del 1: uden hjælpemidler

### Opgave 1

**Opgave 1** a) Reducér udtrykket  $(2a + b) \cdot (2a - b) + b^2$ .

a)

$$(2 \cdot a + b) \cdot (2 \cdot a - b) + b^2 = 4a^2 + 2 \cdot a \cdot b - 2 \cdot a \cdot b - b^2 + b^2 = 4a^2$$

### Opgave 2

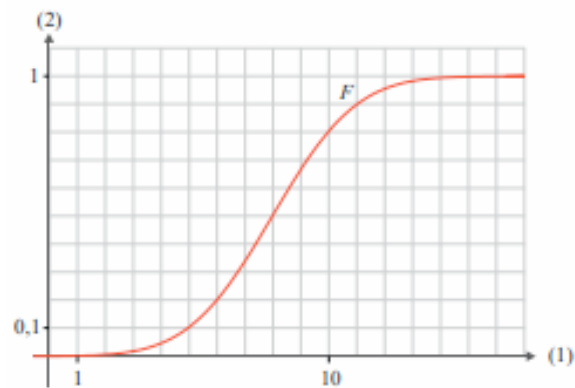
**Opgave 2** På figuren ses grafen for fordelingsfunktionen  $F$  for en normalfordelt stokastisk variabel  $X$ .

En funktion  $f$  er givet ved forskriften

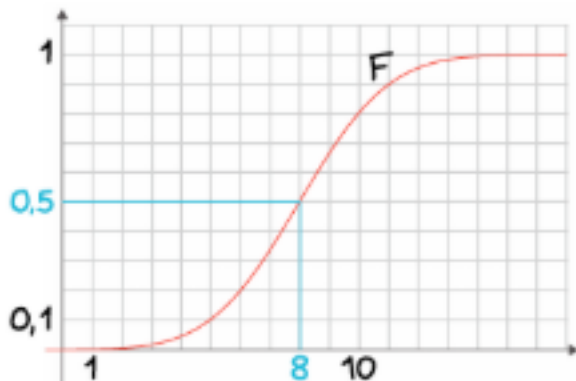
Bilag vedlagt

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 8}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-10}{8}\right)^2}$$

a) Gør rede for, at  $f$  ikke kan være tæthedsfunktion for  $X$ .  
Brug bilaget.



Funktionen kan ikke være tæthedsfunktionen for  $x$ , da dens middelværdi er 10, hvor på grafen aflæser man middelværdien til at være 8



## Opgave 3

**Opgave 3** En vektorfunktion  $\vec{r}$  er givet ved

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t^2 - t + 1 \\ t^3 - 4t^2 + 9 \end{pmatrix}.$$

a) Bestem  $\vec{r}(2)$ .

b) Bestem en parameterfremstilling for tangenten til banekurven for  $\vec{r}$  i det punkt, hvor  $t = 2$ .

a)

jeg indsætter 2 på t's plads

$$r(2) = \begin{pmatrix} 2^2 - 2 + 1 \\ 2^3 - 4 \cdot 2^2 + 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - 2 + 1 \\ 8 - 16 + 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b)

punktet blev bestemt i a) altså  $P(3, 1)$

retningsvektoren er den afledte af funktionen hvor 2 derefter bliver sat ind på t's plads

$$r'(t) = \begin{pmatrix} 2 \cdot t - 1 \\ 3 \cdot t^2 - 8 \cdot t \end{pmatrix}$$

jeg indsætter 2

$$r'(2) = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 - 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

tangenten til banekurven for  $r$  i  $p$  er givet ved parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

## Opgave 4

**Opgave 4** En funktion  $f$  er løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = 2 + \frac{3}{x} \cdot y.$$

a) Bestem linjeelementet i punktet  $P(1, 5)$ .

b) Undersøg, om funktionen  $g(x) = 6x^3 - x$  er en løsning til differentialligningen.

a)

jeg bruger definitionen af linjeelement:  $(x_0, y_0, y'_0)$

Jeg indsætter nu bare punktet i differentiaalligningen for at finde den sidste koordinat

$$\frac{dy}{dx} = 2 + \frac{3}{1} \cdot 5 = 2 + 15 = 17$$

Linjeelementet er dermed fundet til at være:  $(1, 5, 17)$

b)

Jeg tager den afledte af  $g$  og sætter lig med differentiaalligningen og jeg sætter  $g$  ind i stedet for  $y$

$$g'(x) = 18 \cdot x^2 - 1$$

$$18 \cdot x^2 - 1 = 2 + \frac{3}{x} \cdot (6 \cdot x^3 - x) \Leftrightarrow 18 \cdot x^2 - 1 = 2 + \frac{18 \cdot x^3 - 3 \cdot x}{x} \Leftrightarrow 18 \cdot x^2 - 1 = 2 + 18 \cdot x^2 - 3 \Leftrightarrow 18 \cdot x^2 - 1 = 18 \cdot x^2 - 1$$

altså  $g$  er en løsning

## Opgave 5

**Opgave 5** En funktion  $f$  er givet ved forskriften

$$f(x) = x^3 + 2x^2 + 5.$$

a) Bestem den stamfunktion til  $f$ , hvis graf går gennem punktet  $P(1, 6)$ .

a)

jeg tager integralet af  $f$

$$\int x^3 + 2x^2 + 5 \, dx = \frac{x^4}{4} + \frac{2}{3}x^3 + 5x + c$$

jeg indsætter punktet i stamfunktionen for at finde  $c$

$$6 = \frac{1^4}{4} + \frac{2}{3} \cdot 1^3 + 5 \cdot 1 + c \Leftrightarrow 6 = \frac{1}{4} + \frac{2}{3} + 5 + c \Leftrightarrow 6 = \frac{3}{12} + \frac{8}{12} + \frac{60}{12} + c \Leftrightarrow 6 = \frac{71}{12} + c \Leftrightarrow 6 - \frac{71}{12} = c \Leftrightarrow \frac{72}{12} - \frac{71}{12} = c \Leftrightarrow \frac{1}{12} = c$$

Dermed er  $c$  fundet

stamfunktionen til  $f$  hvis graf går gennem punktet  $P$  er

$$F(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{2}{3}x^3 + 5x + \frac{1}{12}$$

## Opgave 6 \*

**Opgave 6** På en fabrik producerer maskinerne  $M_1$  og  $M_2$  poser med slik.

Maskine  $M_1$  producerer 70 % af poserne.

Maskine  $M_2$  producerer 30 % af poserne.

20 % af poserne fra maskine  $M_1$  indeholder for lidt slik, og

10 % af poserne fra maskine  $M_2$  indeholder for lidt slik.

- a) Hvad er sandsynligheden for, at en tilfældigt udvalgt slikpose fra produktionen indeholder for lidt slik?



Billedkilde:  
dontwasteyourmoney

a)

Vi får oplyst, at på en fabrik producerer maskinerne  $M_1$  og  $M_2$  poser med slik. Vi opstiller en tabel med oplysninger om maskinerne:

Maskine	$M_1$	$M_2$
Fordeling	0,70	0,30
Sandsynlighed for for lidt slik (s)	0,20	0,10

Vi benytter formel F(9) til at bestemme  $P(s)$ :

$$\begin{aligned}P(s) &= P(S|M_1) \cdot P(M_1) + P(S|M_2) \cdot P(M_2) \\ &= 0,20 \cdot 0,70 + 0,10 \cdot 0,30 \\ &= 0,14 + 0,03 \\ &= 0,17\end{aligned}$$

Sandsynligheden for, at en tilfældigt udvalgt slikpose fra produktionen indeholder for lidt slik, er 17%.

## Opgave 7 \*

**Opgave 7** Om en funktion  $f$  af to variable oplyses det, at de partielt afledede er bestemt ved

$$f'_x(x, y) = 2x + y - 5$$

$$f'_y(x, y) = x - 4y + 2$$

**a)** Bestem  $\nabla f(3, 5)$ .

Funktionen  $f$  har netop ét stationært punkt  $P$ .

**b)** Bestem  $x$ -koordinaten og  $y$ -koordinaten til punktet  $P$ .

a)  
jeg indsætter punktet  $(3, 5)$  ind på deres pladser i de partielt afledte funktioner

$$f'_x(3, 5) = 2 \cdot 3 + 5 - 5 = 6$$

$$f'_y(3, 5) = 3 - 4 \cdot 5 + 2 = 3 - 20 + 2 = -15$$

gradienten kan nu skrives som

$$\nabla f(3, 5) = \begin{pmatrix} 6 \\ -15 \end{pmatrix}$$

b)

Vi bestemmer  $x$ - og  $y$ -koordinaten til det stationære punkt  $P$  ved at løse ligningssystemet

$$f'_x(x,y) = 0$$

$$f'_y(x,y) = 0$$

Vi isolerer  $y$  i den første ligning:

$$\begin{aligned} & f'_x(x,y) = 0 \\ \downarrow & \\ & 2x + y - 5 = 0 \\ \downarrow & \\ & y - 5 = -2x \\ \downarrow & \\ & y = -2x + 5 \end{aligned}$$

Vi sætter  $y = -2x + 5$  ind i den anden ligning:

$$\begin{aligned} & f'_y(x,y) = 0 \\ \downarrow & \\ & x - 4 \cdot y + 2 = 0 \\ \downarrow & \\ & x - 4 \cdot (-2x + 5) + 2 = 0 \\ \downarrow & \\ & x + 8x - 20 + 2 = 0 \\ \downarrow & \\ & 9x - 18 = 0 \\ \downarrow & \\ & 9x = 18 \\ \downarrow & \\ & x = 2 \end{aligned}$$

Vi bestemmer  $y$ -værdien ved at sætte  $x = 2$  ind i ligningen  $y = -2x + 5$ :

$$\begin{aligned} y &= -2 \cdot 2 + 5 \\ &= -4 + 5 \\ &= 1 \end{aligned}$$

$x$ -koordinaten til  $P$  er 2, og  $y$ -koordinaten er 1.

## Opgave 8

**Opgave 8** a) Bestem  $\int (x^2 + 3)^2 \cdot 4x dx$ .

a)  
jeg bestemmer integral

$$\int (x^2 + 3)^2 \cdot 4 \cdot x dx$$

$$\text{lad } u = x^2 + 3 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x \Leftrightarrow \frac{1}{2x} du = dx$$

$$\int u^2 \cdot \frac{4x}{2x} du = \int 2u^2 du = 2 \cdot \frac{u^3}{3} + c = 2 \cdot \frac{(x^2 + 3)^3}{3} + c$$

## Opgave 9

**Opgave 9** En funktion  $f$  er bestemt ved

$$f(x) = \sin(2x) + 3x + 4.$$

a) Gør rede for, at  $f$  er en voksende funktion.

a)  
 $f$  er voksende hvis  $f'(x) > 0$

jeg tager den afledte

$$f'(x) = \cos(2x) \cdot 2 + 3$$

Dette er en harmonisk svingning.  $d = 3$  og  $A = 2$  jeg bestemmer nu  $d - A$  og  $d + A$

$$3 - 2 = 1$$

$$3 + 2 = 5$$

værdimængden for  $f'(x)$  er  $[1; 5]$  så  $f'(x) > 0$ . dvs at  $f$  er en voksende funktion

Del 2: med hjælpemidler

## Opgave 10

restart; with (Gym) :

**Opgave 10** En vektorfunktion  $\vec{s}$  er givet ved

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}t^4 + 2t \\ t^3 - t + 2 \end{pmatrix}.$$

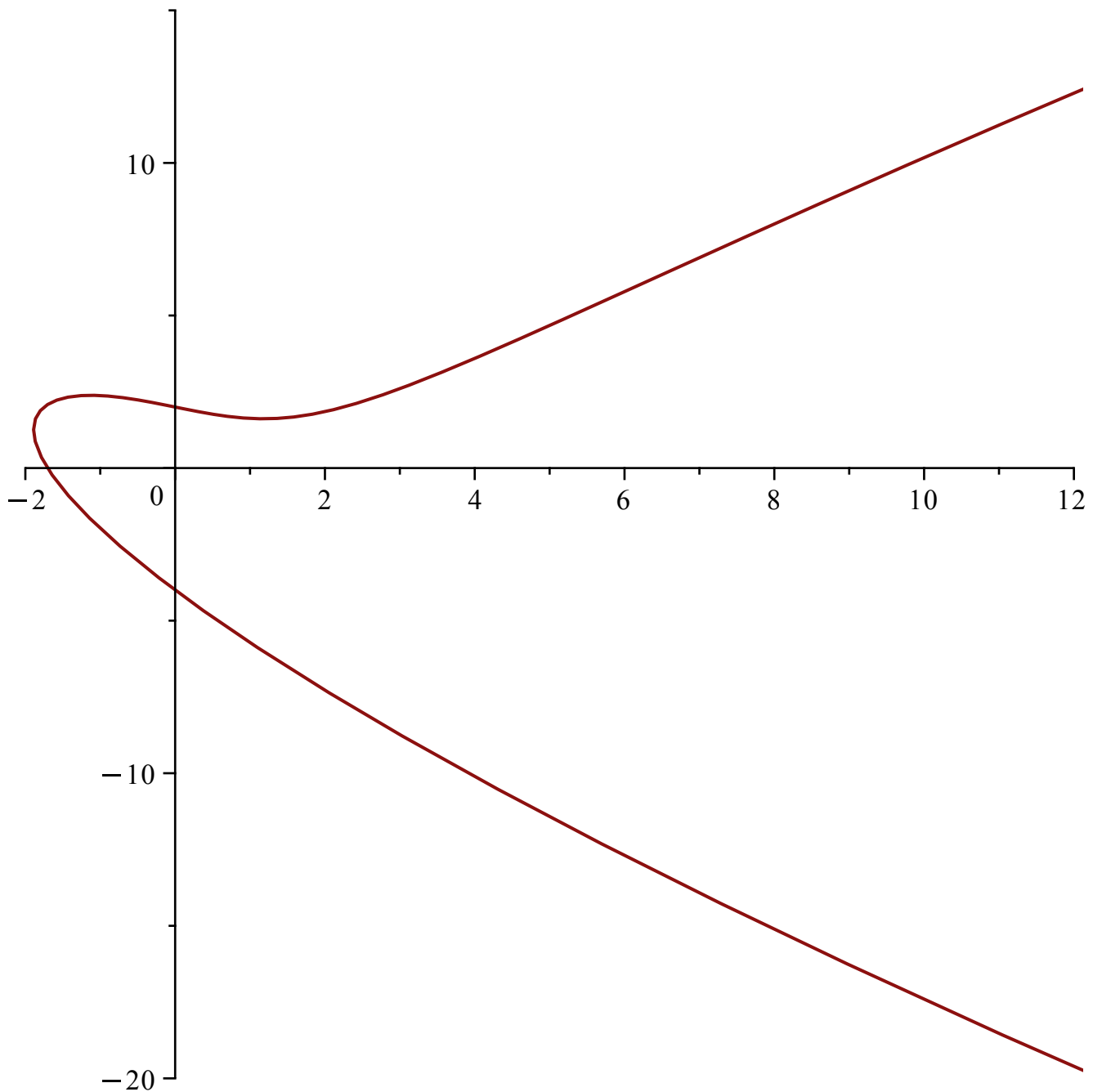
- a) Tegn banekurven for  $\vec{s}$ .
- b) Bestem de  $t$ -værdier, hvor banekurven har en vandret tangent.

$$s(t) := \left\langle \frac{1}{4} \cdot t^4 + 2 \cdot t, t^3 - t + 2 \right\rangle :$$

a)

jeg tegner banekurven ved at bruge vektorPlot

`vektorPlot([s(t), t = -10 ..10], vindue = [-2 ..12, -20 ..15])`



b)

For at bestemme de t-værdier hvor banekurven har en vandret tangent skal jeg finde den afledte af dens y funktion og sætte lig 0

$$y(t) := t^3 - t + 2 :$$

$$y'(t) = 0 \xrightarrow{\text{solve for t}} \left[ \left[ t = \frac{\sqrt{3}}{3} \right], \left[ t = -\frac{\sqrt{3}}{3} \right] \right]$$

Banekurven har to vandrette tangenter, hvor de tilhørende  $t$  værdier er  $\left[ \left[ t = \frac{\sqrt{3}}{3} \right], \left[ t = -\frac{\sqrt{3}}{3} \right] \right]$

## Opgave 11

*restart, with (Gym) :*

### Opgave 11



*Billedkilde: bedsttest*

Tabellen viser en række målinger af sammenhørende værdier af massen af kogende vand i en gryde og den tid, som vandet har kogt.

Tid (sekunder)	0,0	1,0	...	135,0	136,0
Massen af vand (gram)	2143,3	2142,6		2041,7	2040,4

*Hele tabellen med alle 137 datapunkter findes i bilaget: kogendevand.xlsx*

I en lineær model kan sammenhængen mellem den tid, som vandet har kogt, og massen af det kogende vand i gryden beskrives ved

$$f(t) = a \cdot t + b,$$

hvor  $f(t)$  betegner massen af det kogende vand i gryden (målt i gram)  $t$  sekunder, efter vandet er begyndt at koge.

- Benyt tabellens data til at bestemme tallene  $a$  og  $b$ , og giv en fortolkning af den fundne  $a$ -værdi.
- Gør rede for, at residualerne i modellen med god tilnærmelse er normalfordelte.

havde ikke dataen tilgængelig :(

## Opgave 12

*restart, with (Gym) :*

**Opgave 12** En funktion  $f$  er givet ved forskriften

$$f(x) = \sqrt{x} \cdot (x-3) \cdot (x-5), \quad x \geq 0.$$

- Bestem monotoniforholdene for  $f$  ved hjælp af  $f'(x)$ .

$$f(x) := \sqrt{x} \cdot (x - 3) \cdot (x - 5) :$$

a)

For at bestemme monotoni forholdet skal jeg tage den afledte af  $f$  og sætte lig nul

$$f'(x) = 0 \xrightarrow{\text{solve for } x} \left[ \left[ x = \frac{12}{5} + \frac{\sqrt{69}}{5} \right], \left[ x = \frac{12}{5} - \frac{\sqrt{69}}{5} \right] \right] \xrightarrow{\text{at 5 digits}} \\ \left[ [x = 4.0613], [x = 0.7387] \right]$$

Jeg undersøger nu fortegnet for differentialkvotienterne omkring nulpunkterne

$$f'(0.5) = 3.005203817$$

$$f'(1) = -2$$

$$f'(5.) = 4.472135954$$

Dermed er  $f$  voksende på intervallerne  $[0, 0.7387]$  og  $[4.0613, \infty[$  og aftagende på intervallet  $[0.7387, 4.0613]$

## Opgave 13

*restart, with(Gym) :*

**Opgave 13** I en model kan udviklingen i temperaturen af en portion risengrød beskrives ved differentilligningen

$$\frac{dy}{dt} = 1 - 0,05y,$$

hvor  $y = f(t)$  betegner risengrødens temperatur (målt i  $^{\circ}\text{C}$ ), og  $t$  er tiden (målt i minutter), efter den blev sat til afkøling.



Billedkilde: tv2.dk

**a)** Bestem væksthastigheden for grødens temperatur, når den er  $70^{\circ}\text{C}$ .

Det oplyses, at til tidspunktet  $t = 0$  er væksthastigheden for grødens temperatur  $-3^{\circ}\text{C}$  pr. minut.

**b)** Bestem en forskrift for  $f(t)$ .

a)

For at bestemme væksthastigheden når temperaturen er på  $70$  grader indsætter jeg  $70$  på  $y$ 's plads

$$\frac{dy}{dt} = 1 - 0.05 \cdot 70 = -2.50$$

dens temperatur falder med 2.5 grad pr minut

b)

jeg bruger dsolve til at bestemme forskriften

$dsolve(\{y'(t) = 1 - 0.05 \cdot y(t), y'(0) = -3\}, y(t))$

$$y(t) = 60 e^{-\frac{t}{20}} + 20 \quad (8.13.1)$$

dermed er forskriften fundet

## Opgave 14 \*

*restart, with(Gym) :*

**Opgave 14** I en bestemt virksomhed udgør antallet af kvindelige ansatte på deltid 13 % af det samlede antal ansatte.

54 % af virksomhedens ansatte er kvinder.

a) Bestem sandsynligheden for, at en tilfældigt udvalgt kvindelig ansat er på deltid.

Blandt de af virksomhedens ansatte, der er på deltid, er 61 % kvinder.

b) Bestem sandsynligheden for, at en tilfældigt udvalgt ansat er på deltid.

a)

Vi får oplyst, at i en bestemt virksomhed er 54% af virksomhedens ansatte kvinder, og at 13% af de ansatte er kvindelige ansatte på deltid.

Vi opstiller to hændelser:

$K$ : en ansat er en kvinde.

$D$ : en ansat er på deltid.

Da 54% af de ansatte er kvinder, så er  $P(K) = 0,54$ , og da 13% af de ansatte er kvindelige ansatte på deltid, så er  $P(K \cap D) = 0,13$ .

Vi bestemmer sandsynligheden for, at en tilfældigt udvalgt kvindelig ansat er på deltid, dvs.

$P(D | K)$ :

$$\frac{0.13}{0.54}$$

$$0.2407407407 \quad (6)$$

Sandsynligheden for, at en tilfældigt udvalgt kvindelig ansat er på deltid, er 24,1%.

b)

Vi får oplyst, at blandt de ansatte, der er på deltid, er 61% kvinder, dvs. at  $P(K | D) = 0,61$ .

Vi skal bestemme sandsynligheden for, at en tilfældigt udvalgt ansat er på deltid, dvs.  $P(D)$ :

$$\frac{0.13}{0.61}$$

$$0.61$$

$$0.2131147541$$

(7)

Sandsynligheden for, at en tilfældigt udvalgt ansat er på deltid, er 21,3%.

## Opgave 15

*restart, with(Gym) :*

**Opgave 15** En funktion  $f$  af to variable er givet ved

$$f(x, y) = \frac{1}{6} \cdot (x^2 + y^2 - 4x \cdot y - 7).$$

a) Gør rede for, at punkterne  $A(-3, 2, 5)$  og  $B(9, 2, 1)$  ligger på grafen for  $f$ .

b) Bestem længden af snitkurven fra punktet  $A$  til punktet  $B$ .

$$f(x, y) := \frac{1}{6} \cdot (x^2 + y^2 - 4 \cdot x \cdot y - 7) :$$

a)

For at gøre rede om punkterne ligger på grafen vil jeg indsætte  $x$  og  $y$  i funktionen og se om jeg ender med den samme  $z$  værdi

$$f(-3, 2) = 5$$

$$f(9, 2) = 1$$

Begge punkter  $A$  og  $B$  ligger på grafen for  $f$

b)

For at bestemme længden af snitkurven vil jeg bruge formlen for kurvelængde:  $L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} \, dx$

Da begge punkter fastholder den samme  $y$ -værdi skal jeg definere en ny funktion hvor  $y = 2$

$$g(x) := f(x, 2) :$$

nu tager jeg kurvelængden fra  $A$ 's  $x$  værdi til  $B$ 's  $x$  værdi

$$\int_{-3}^9 \sqrt{1 + g'(x)^2} dx$$

$$\frac{7\sqrt{2}\sqrt{29}}{6} + \frac{3 \operatorname{arcsinh}\left(\frac{7}{3}\right)}{2} + \frac{5\sqrt{2}\sqrt{17}}{6} + \frac{3 \operatorname{arcsinh}\left(\frac{5}{3}\right)}{2} \quad (8.15.1)$$

at 5 digits  
→

$$18.045 \quad (8.15.2)$$

længden af snitkurven fra punktet A til punktet B er 18.045

## Opgave 16

restart, with(Gym) :

**Opgave 16** To funktioner  $f$  og  $g$  er givet ved

$$f(x) = 6x - x^2$$

$$g(x) = k \cdot x, \quad \text{hvor } 0 < k < 6.$$

- a) Bestem for  $k = 2$  koordinatsættet til hvert af skæringspunkterne mellem grafen for  $f$  og grafen for  $g$ .

I første kvadrant afgrænser graferne for  $f$  og  $g$  et område  $M$ , der har et areal.

- b) Bestem  $k$ , så arealet af  $M$  er lig 18.

$$f(x) := 6 \cdot x - x^2 :$$

$$g(x) := k \cdot x :$$

a)

jeg sætter funktionerne lig hinanden og sætter  $k = 2$

$$f(x) = 2 \cdot x \xrightarrow{\text{solve for } x} [[x = 0], [x = 4]]$$

jeg indsætter nu disse 2 værdier i en af funktionerne for at finde den tilsvarende  $y$ -værdi

$$f(0) = 0$$

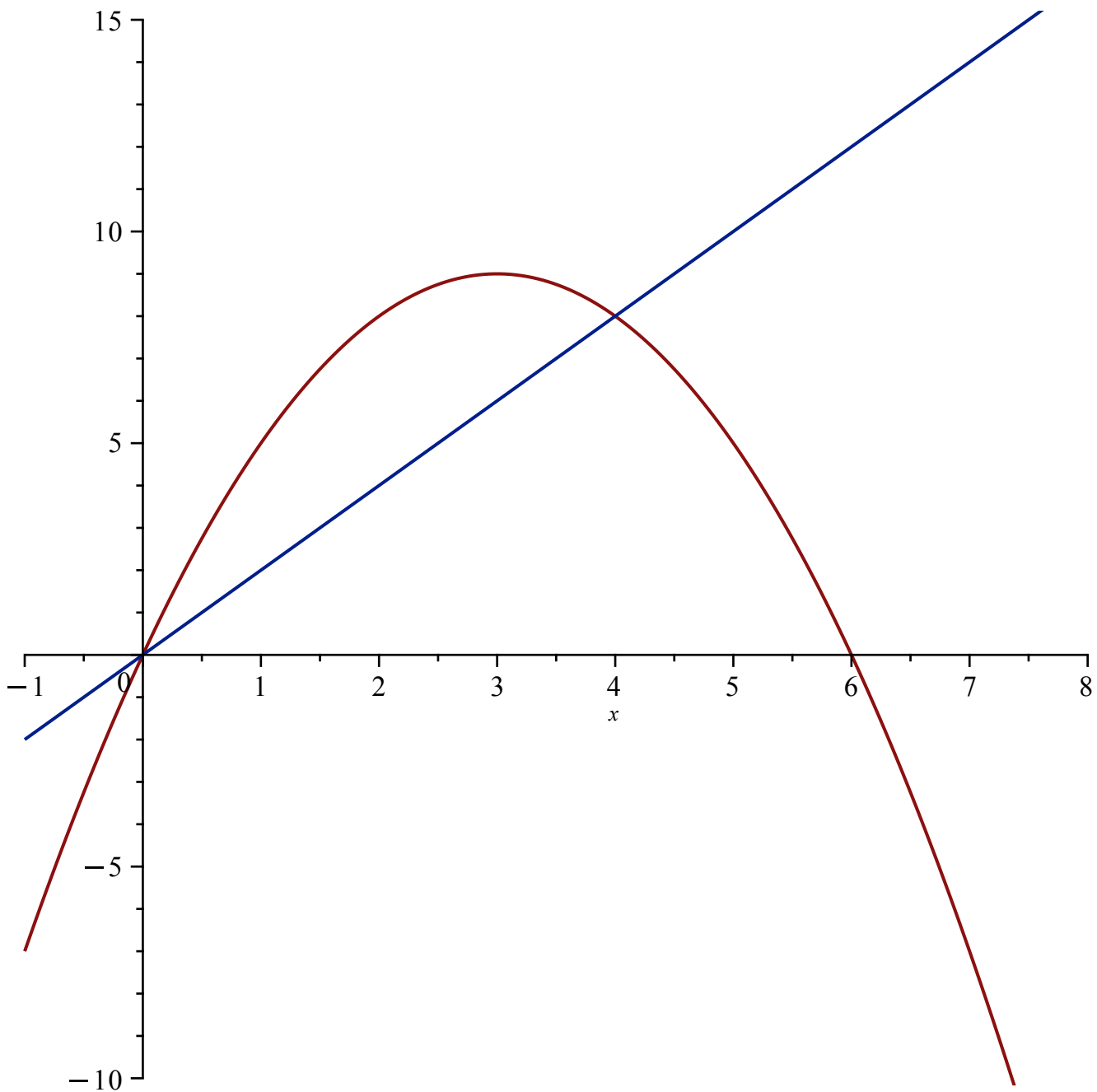
$$f(4) = 8$$

skæringspunkterne er dermed fundet når  $k = 2$ :  $(0, 0)$  og  $(4, 8)$

b)

Jeg vælger først at tegne graferne

$$\text{plot}([f(x), 2 \cdot x], \text{view} = [-1 .. 8, -10 .. 15])$$



For at bestemme intervallerne sætter jeg funktionerne lig hinanden

$$f(x) = g(x) \xrightarrow{\text{solve for } x} [[x=0], [x=-k+6]]$$

$$fsolve\left(\int_0^{-k+6} f(x) - g(x) dx = 18, k\right)$$

1.237796844

**(8.16.1)**

arealet af M er 18 når  $k = 1.237796844$

*restart, with(Gym) :*

# stx242\_MAT\_A\_12082024

Del 1: uden hjælpemidler

## Opgave 1

**Opgave 1** En harmonisk svingning  $f$  er givet ved forskriften

$$f(x) = 7 \cdot \sin(x + 3).$$

**a)** Bestem amplituden  $A$  og perioden  $T$ .

a)

jeg bruger definitionen af en harmonisk svingning:  $f(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \phi) + d$  og  $T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega}$

Jeg kan allerede spotte at

$$A = 7$$

$$\omega = 1$$

dermed må

$$T = \frac{2 \cdot \pi}{1} = 2 \cdot \pi$$

## Opgave 2

**Opgave 2** En funktion  $f$  er givet ved forskriften

$$f(x) = e^x + 6x - 9.$$

**a)** Bestem en stamfunktion til  $f$ .

a)

jeg tager integralet af funktionen

$$\int e^x + 6 \cdot x - 9 \, dx = e^x + 3 \cdot x^2 - 9 \cdot x + c$$

stamfunktionen er dermed fundet

$$F(x) = e^x + 3 \cdot x^2 - 9 \cdot x + c$$

## Opgave 3

**Opgave 3** En funktion  $f$  af to variable er givet ved

$$f(x, y) = x^2 + x \cdot y + 2y^2 - 5.$$

a) Bestem  $f'_y(x, y)$ .

a)  
jeg tager den partielt afledte af  $f$  med respekt til  $y$

$$\frac{\partial}{\partial y} (x^2 + x \cdot y + 2 \cdot y^2 - 5) = x + 4 \cdot y$$

## Opgave 4

**Opgave 4** Når en bestemt type bærbare computere bruges til gaming, kan batteritiden (målt i minutter) beskrives ved en normalfordelt stokastisk variabel  $X$  med middelværdi  $\mu = 163$  og spredning  $\sigma = 17$ .

a) Afgør, om en batteritid på 200 minutter er et exceptionelt udfald.

a)  
Definitionen for et exceptionelt udfald er  $[\mu - 3 \cdot \sigma, \mu + 3 \cdot \sigma]$   
jeg indsætter derfor værdierne i intervallet

$$[163 - 3 \cdot 17, 163 + 3 \cdot 17] = [112, 214]$$

da 200 ligger inde for intervallet  $[112, 214]$  er batteriet på 200 minutter ikke et exceptionelt udfald

## Opgave 5

**Opgave 5** En funktion  $f$  er løsning til differentiallyningen

$$y' = 4 - \frac{1}{2}y.$$

Grafen for  $f$  går gennem punktet  $P(0, 14)$ .

- a) Bestem en ligning for tangenten til grafen for  $f$  i punktet  $P$ .  
b) Bestem en forskrift for  $f$ .

a)  
jeg indsætter punktet i differentialligningen for at finde hældningen

$$y' = 4 - \frac{1}{2} \cdot 14 = 4 - 7 = -3$$

jeg indsætter nu hældningen og punktet i:  $b = y - a \cdot x$   
 $b = 14 - (-3) \cdot 0 = 14$

dermed er tangenten til grafen for  $f$  i punktet  $p$   
 $y = -3x + 14$

b)  
jeg bruger formelsamlingens løsning

$$(177) \quad y' = b - a \cdot y \quad y = \frac{b}{a} + c \cdot e^{-ax}$$

$$y = \frac{4}{\frac{1}{2}} + c \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot x} = 8 + c \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot x}$$

jeg indsætter nu punktet  $P$  for at finde  $c$

$$14 = 8 + c \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot 0} \Leftrightarrow 14 = 8 + c \cdot e^0 \Leftrightarrow 14 = 8 + c \Leftrightarrow c = 6$$

dermed er forskriften for  $f$

$$y = 8 + 6 \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot x}$$

## Opgave 6

**Opgave 6**      a) Løs ligningen  $e^x \cdot \left(\frac{1}{x} - 4\right) = 0$ .

En funktion  $f$  er givet ved

$$f(x) = e^x \cdot \left(\frac{1}{x} - 4\right).$$

b) Bestem  $f'(x)$ .

a)  
jeg løser ligningen

$$e^x \cdot \left( \frac{1}{x} - 4 \right) = 0$$

jeg bruger nulreglen

$$e^x = 0 \Leftrightarrow \emptyset$$

$$\frac{1}{x} - 4 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} = 4 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$$

b)

jeg bestemmer den afledte af  $f$

$$f'(x) = e^x \cdot \left( \frac{1}{x} - 4 \right) + e^x \cdot \left( -\frac{1}{x^2} \right) = e^x \cdot \left( -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} - 4 \right)$$

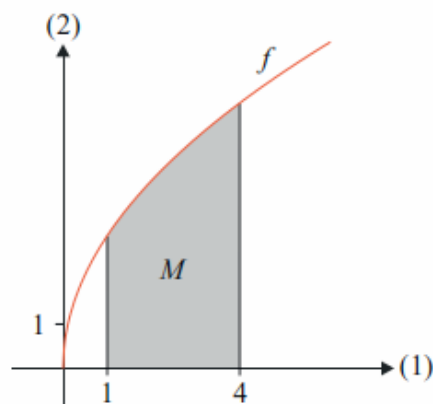
## Opgave 7

**Opgave 7** Figuren viser grafen for en funktion  $f$  og et område  $M$ .

Nedenstående tabel viser nogle værdier af funktionen  $f$  og en stamfunktion  $F$  til  $f$ .

$x$	1	4
$f(x)$	3	6
$F(x)$	2	16

a) Bestem arealet af  $M$ .



a)

for at bestemme arealet af  $M$  skal jeg bruge tabellen og bilaget. Jeg kan se at intervallet for integralet er fra 1 til 4. Det må så betyde at jeg kan trække stamfunktionens værdier fra hinanden fra tabellen

$$M = \int_1^4 f(x) \, dx = F(4) - F(1) = 16 - 2 = 14$$

## Opgave 8 \*

**Opgave 8** I et sandsynlighedsfelt er  $P(A) = \frac{4}{11}$ ,  $P(B) = \frac{9}{11}$  og  $P(A \cup B) = \frac{10}{11}$ .

a) Bestem  $P(A|B)$ .

a)

Vi bestemmer først  $P(A \cap B)$ :

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A) + P(B) - P(A \cup B) \\ &= \frac{4}{11} + \frac{9}{11} - \frac{10}{11} \\ &= \frac{3}{11} \end{aligned}$$

Derefter bestemmer vi  $P(A|B)$ :

$$\begin{aligned} P(A|B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \\ &= \frac{\frac{3}{11}}{\frac{9}{11}} \\ &= \frac{3 \cdot 11}{11 \cdot 9} \\ &= \frac{3}{9} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Sandsynligheden er  $P(A|B) = \frac{1}{3}$ .

**Opgave 9 \***

**Opgave 9** En vektorfunktion  $\vec{s}$  er givet ved

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} t^2 + 3 \\ t^2 + 6t + 8 \end{pmatrix}.$$

a) Bestem koordinatsættet til hvert af banekurvens skæringspunkter med førsteaksen.

En linje  $l$  er bestemt ved ligningen

$$l: -x + 2y + 40 = 0.$$

b) Bestem  $t$ -værdien til det punkt på banekurven for  $\vec{s}$ , hvor tangenten og linjen  $l$  er parallelle.

a)

For at finde skæringspunktet med førsteaksen skal vektorfunktionens  $y$  funktion sættes lig 0

$$t^2 + 6 \cdot t + 8 = 0$$

jeg faktorerer

$$(t + 4)(t + 2) = 0$$

jeg bruger nulreglen

$$t + 4 = 0 \Leftrightarrow t = -4$$

$$t + 2 = 0 \Leftrightarrow t = -2$$

jeg indsætter nu disse  $t$ -værdi i vektorfunktionen

$$s(-4) = \begin{pmatrix} (-4)^2 + 3 \\ (-4)^2 + 6 \cdot (-4) + 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$s(-2) = \begin{pmatrix} (-2)^2 + 3 \\ (-2)^2 + 6 \cdot (-2) + 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Banekurvens skæringspunkter med førsteaksen har koordinatsættene:  $(7, 0)$  og  $(19, 0)$

b)

$\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$  er en normalvektor til linjen  $L$  givet ved ligningen  $-x + 2y + 40 = 0$ , dvs. at  $\vec{r} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$  er en retningsvektor til  $L$ .

Vi kalder punktet på banekurven for  $\mathfrak{z}$ , hvor tangenten og linjen  $L$  er parallelle, for  $P_{\mathfrak{z}}$ .  $\mathfrak{z}'(t_0)$  er en retningsvektor for tangenten i  $P_{\mathfrak{z}}$ . Vi bestemmer  $\mathfrak{z}'(t)$ :

$$\begin{aligned}\mathfrak{z}'(t) &= \begin{pmatrix} (t^2 + 3)' \\ (t^2 + 6t + 8)' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (t^2)' + (3)' \\ (t^2)' + (6t + 8)' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2t \\ 2t + 6 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

To linjer er parallelle, hvis deres retningsvektorer er parallelle, dvs. at da tangenten i  $P_{\mathfrak{z}}$  er parallel med linjen  $L$ , så findes der en konstant  $k \in \mathbb{R}$ , så  $k \cdot \mathfrak{z}'(t_0) = \vec{r}$ . Vi bestemmer  $k$  ved at løse ligningssystemet:

$$\begin{aligned}k \cdot 2t_0 &= -2 \\ k \cdot (2t_0 + 6) &= -1 \\ \downarrow \\ k \cdot 2t_0 &= -2 \\ k \cdot 2t_0 + 6k &= -1 \\ \downarrow \\ k \cdot 2t_0 + 6k - (k \cdot 2t_0) &= -1 - (-2) \\ \downarrow \\ 6k &= 1 \\ \downarrow \\ k &= \frac{1}{6}\end{aligned}$$

Derefter bestemmer vi  $t_0$ :

Del 2: med hjælpemidler

## Opgave 10

restart, with (Gym) :

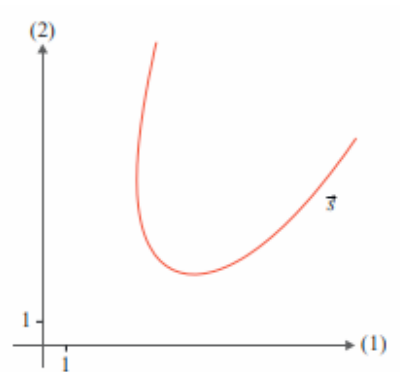
**Opgave 10** En vektorfunktion  $\vec{s}$  er givet ved

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} 4 \cdot \sqrt{t^2 + 9} - 8 \\ t^2 - 4t + 7 \end{pmatrix}.$$

- a) Bestem koordinatsættet til det punkt  $P$  på banekurven for  $\vec{s}$ , hvor  $t = -2$ .

Punktet  $Q(12, 7)$  ligger på banekurven for  $\vec{s}$ .

- b) Bestem  $t$ -værdien hørende til punktet  $Q$ .



$$s(t) := \langle 4 \cdot \sqrt{t^2 + 9} - 8, t^2 - 4 \cdot t + 7 \rangle :$$

- a)  
jeg indsætter -2 på t's plads

$$s(-2) = \begin{bmatrix} 6.42220510 \\ 19. \end{bmatrix}$$

Dermed er koordinatsættet til punktet  $P$  bestemt  $P(6.42220510, 19)$

- b)  
Jeg sætter punktet lig med vektorfunktionen og løser for  $t$

$$\text{solve}(\{4 \cdot \sqrt{t^2 + 9} - 8 = 12, t^2 - 4 \cdot t + 7 = 7\}, \{t\}) = \{t = 4\}$$

$t$ -værdien hørende til punktet  $Q$  er  $t = 4$

## Opgave 11

restart, with (Gym) :

**Opgave 11** I 1912 blev elektronens ladning for første gang målt ved et forsøg med høj præcision. Forsøget blev udført 83 gange.

Tabellen viser de 83 måleresultater angivet i enheden zC.

Ladning (zC)	157,5	159,6	...	158,8	160,1
--------------	-------	-------	-----	-------	-------

*Alle tabellens 83 måleresultater findes i bilaget "Ladning.xlsx"*

I en model kan måleresultaterne beskrives ved en stokastisk variabel  $X$ .

- Gør rede for, at  $X$  tilnærmelsesvis er normalfordelt.
- Benyt modellen til at bestemme sandsynligheden for, at en måling af elektronens ladning med denne målemetode giver et resultat mellem 159 zC og 161 zC.

*Kilde: Franklin, A.D.: "Millikan's Published and Unpublished Data on Oil Drops"*

jeg havde desværre ikke dataen tilgængelig :(

## opgave 12

*restart, with(Gym) :*

**Opgave 12** To funktioner  $f$  og  $g$  er givet ved

$$f(x) = -x^2 + 22x - 106 \quad \text{og} \quad g(x) = x^2 - 20x + 104.$$

Graferne for de to funktioner afgrænser et område  $M$  i første kvadrant.

- Bestem førstekoordinaten til hvert af skæringspunkterne mellem grafen for  $f$  og grafen for  $g$ .
- Bestem omkredsen af  $M$ .
- Bestem rumfanget af det omdrejningslegeme, der opstår, når  $M$  drejes  $360^\circ$  om førsteaksen.

$$f(x) := -x^2 + 22 \cdot x - 106 :$$

$$g(x) := x^2 - 20 \cdot x + 104 :$$

a)

jeg sætter funktionerne lig hinanden

$$f(x) = g(x) \xrightarrow{\text{solve for x}} \left[ \left[ x = \frac{21}{2} - \frac{\sqrt{21}}{2} \right], \left[ x = \frac{21}{2} + \frac{\sqrt{21}}{2} \right] \right] \xrightarrow{\text{at 5 digits}}$$

$$[[x = 8.2087], [x = 12.791]]$$

Dette er førstekoordinaten

Jeg indsætter nu disse x-værdi i en af funktionerne for at finde den tilsvarende y-værdi

$$f(8.2087) = 7.2086443$$

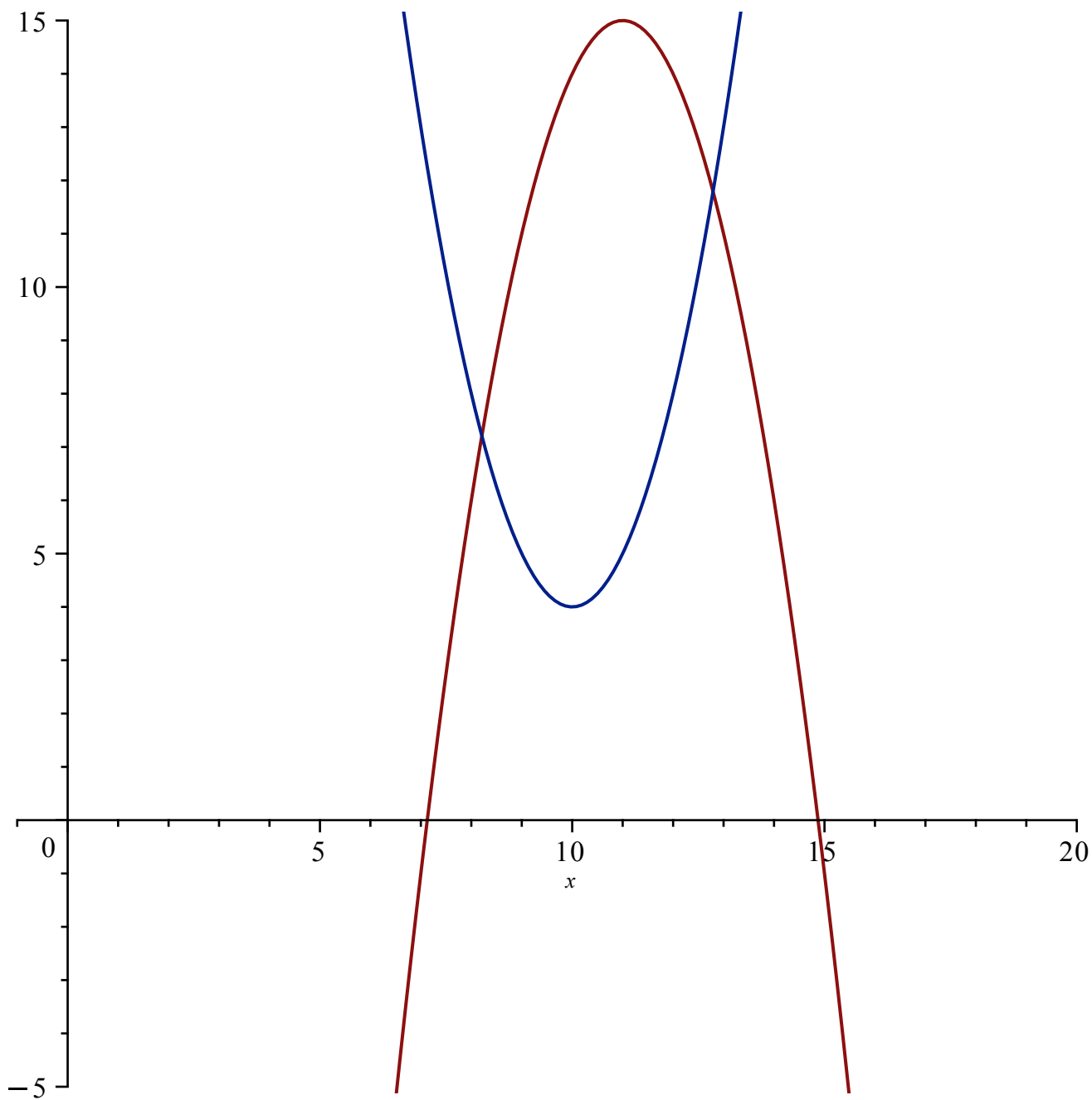
$$f(12.791) = 11.792319$$

skæringspunkterne er dermed:  $(8.2087, 7.2086443)$  og  $(12.791, 11.792319)$

b)

jeg plotter graferne sammen for at finde området M

`plot([f(x), g(x)], view = [-1 ..20, -5 ..15])`



jeg bruger definitionen af kurvelængden:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} \, dx$$

$$O_M = \int_{8.2087}^{12.791} \sqrt{1 + f'(x)^2} \, dx + \int_{8.2087}^{12.791} \sqrt{1 + g'(x)^2} \, dx$$

24.69519167

**(9.12.1)**

omkredsen er dermed fundet til at være lig 24.7

c)

Her bruger jeg definitionen for omdrejningslegeme:  $V = \pi \cdot \int_a^b f(x)^2 \, dx$

$$\pi \cdot \int_{8.2087}^{12.791} f(x)^2 \, dx - \pi \cdot \int_{8.2087}^{12.791} g(x)^2 \, dx$$

1914.745929

**(9.12.2)**

omdrejningslegemet der opstår når M drejes de 360 grader har et rumfang på 1914.745929

## Opgave 13

*restart, with (Gym) :*

### Opgave 13



Billedkilde: viktorsfarmor

I en model kan længden af en stødtand på en zambisk hun-elefant beskrives ved differentilligningen

$$y' = a \cdot (85 - y), \quad 1 \leq x \leq 60,$$

hvor  $a$  er en konstant,  $y = f(x)$  er stødtandens længde (målt i cm), og  $x$  er hun-elefantens alder (målt i år).

Når hun-elefanten er 3 år gammel, er stødtandens længde 13,0 cm.

Når hun-elefanten er 10 år gammel, er stødtandens længde 29,8 cm.

- Bestem en forskrift for  $f$ .
- Bestem hun-elefantens alder, når stødtandens længde vokser med 2,5 cm pr. år.

Kilde: *Growth of the African elephant*

a)

jeg bruger dsolve til at bestemme forskriften

$dsolve(\{y'(x) = a \cdot (85 - y(x)), y(3) = 13\}, y(x))$

$$y(x) = 85 - 72 e^{-a(x-3)} \quad (9.13.1)$$

jeg indsætter nu det andet kendte punkt for at bestemme  $a$

$$29.8 = 85 - 72 e^{-a(10-3)} \xrightarrow{\text{solve } 29.8 = 85 - 72 \cdot \exp(-7 \cdot a)} [a = 0.03795759510] \quad (9.13.2)$$

dermed er forskriften fundet

$$y(x) = 85 - 72 e^{-0.03795759510(x-3)}$$

b)

Jeg sætter 2.5 lig  $y'(x)$  plads

$$y'(x) := 85 - 72 e^{-0.03795759510(x-3)} :$$

$$y'(x) = 2.5 \xrightarrow{\text{solve for } x} [x = 5.347085637]$$

Hun-elefanten er altså 5.35 år når stødtandens længde vokser med 2.5 cm pr år

## Opgave 14\*

restart; with (Gym) :

**Opgave 14** På et bestemt gymnasium går 37 % af eleverne i 1. g.  
Af 1. g-eleverne går 13 % til fodbold.

- a) Hvad er sandsynligheden for, at en tilfældigt udvalgt elev på gymnasiet er 1. g'er og går til fodbold?

På hele gymnasiet går 8 % af eleverne til fodbold.

En tilfældigt udvalgt elev går til fodbold.

- b) Hvad er sandsynligheden for, at denne elev går i 1. g?

a)

Vi får oplyst, at på et bestemt gymnasium går 37% af eleverne i 1.g, samt at 13% af 1.g-eleverne går til fodbold.

Vi lader  $A$  betegne hændelsen "en elev går i 1.g", mens  $F$  betegner hændelsen "en elev går til fodbold". Dermed er  $P(A) = 0,37$ , mens  $P(F|A) = 0,13$ .

Vi benytter definitionen på betinget sandsynlighed til at bestemme sandsynligheden for, at en tilfældigt udvalgt elev på gymnasiet er 1.g'er og går til fodbold, dvs.  $P(A \cap F)$ :

$$\begin{aligned} P(A \cap F) &= P(F | A) \cdot P(A) \\ &= 0,13 \cdot 0,37 \\ &\approx 0,0481 \end{aligned}$$

Sandsynligheden for, at en tilfældigt udvalgt elev på gymnasiet er 1.g'er og går til fodbold, er 4,81%.

b)

Vi får oplyst, at på hele gymnasiet går 8% af eleverne til fodbold, dvs. at  $P(F) = 0,08$ .

Vi får også oplyst, at en tilfældigt udvalgt elev går til fodbold. Vi benytter definitionen på betinget sandsynlighed til at bestemme sandsynligheden for, at denne elev går i 1.g, dvs.  $P(A|F)$ :

$$\begin{aligned} P(A|F) &= \frac{P(A \cap F)}{P(F)} \\ &= \frac{0,0481}{0,08} \\ &= 0,60125 \end{aligned}$$

Sandsynligheden for, at den tilfældigt udvalgte elev går i 1.g, er 60,1%.

## Opgave 15

*restart, with(Gym) :*

**Opgave 15** En funktion  $f$  af to variable er givet ved

$$f(x, y) = x^2 - x \cdot y - 2y + 5.$$

a) Tegn grafen for  $f$  i grafvinduet  $[-15;15] \times [-15;15] \times [-10;20]$ .

Betragt snitfunktionen bestemt ved

$$f(x, k) = x^2 - x \cdot k - 2k + 5, \text{ hvor } k \text{ er et tal.}$$

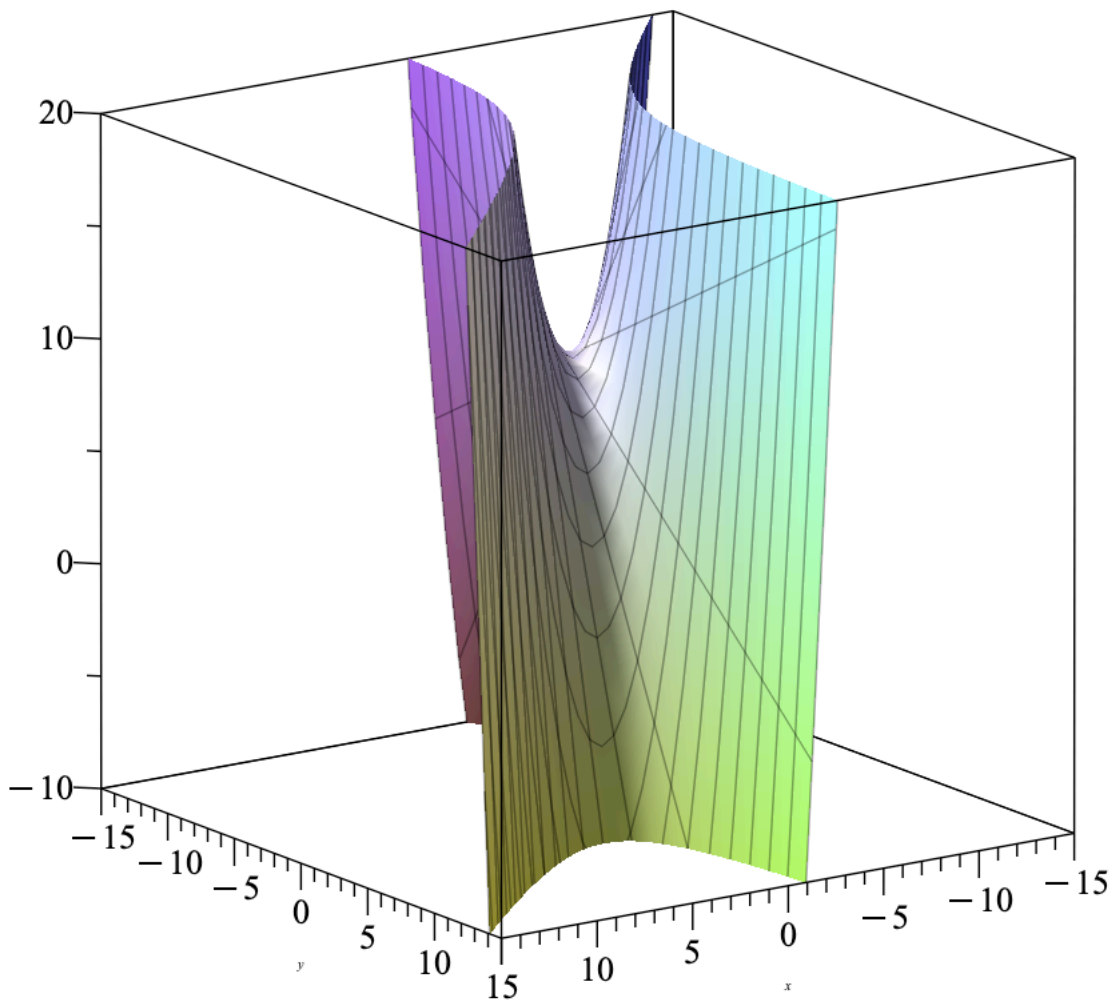
b) Bestem de værdier af  $k$ , for hvilke ligningen  $f(x, k) = 0$  har netop én løsning.

$$f(x, y) := x^2 - x \cdot y - 2 \cdot y + 5 :$$

a)

jeg bruger plot3d for at tegne grafen

`plot3d(f(x, y), x = -15 .. 15, y = -15 .. 15, view = -10 .. 20)`



b)

For at bestemme de værdier af  $k$ , for at ligningen  $f(x, k) = 0$  har netop én løsning vil jeg tage og finde diskriminanten af  $f(x, k)$  og sætte lig nul

$$d = k^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2k + 5) = 0 \xrightarrow{\text{solve } k^2 + 8k - 20 = 0}$$

$$[[k = 2], [k = -10]]$$

**(9.15.1)**

Når  $k$  er lig 2 eller -10 har ligningen  $f(x, k) = 0$  kun én løsning

*restart, with (Gym) :*